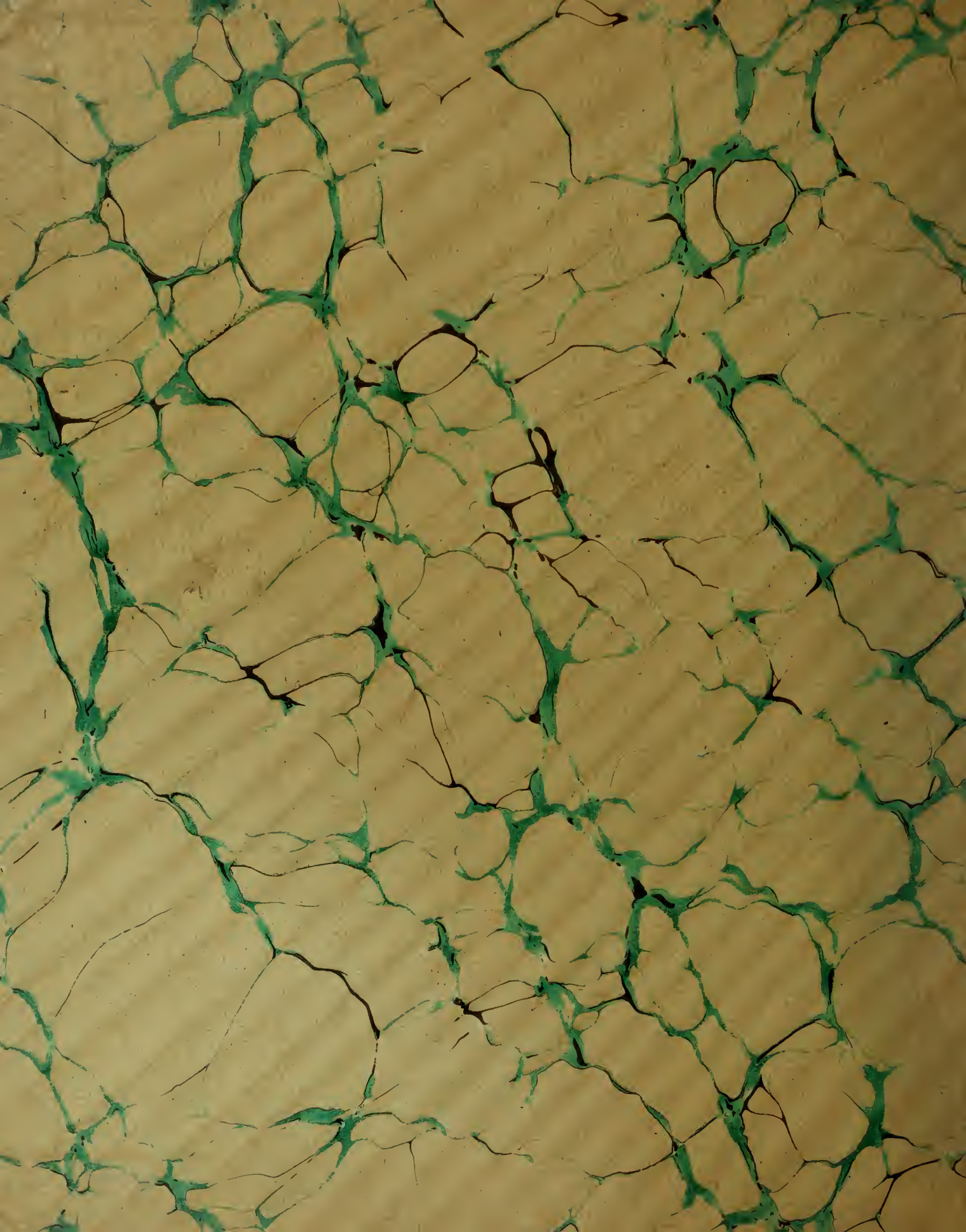


JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÉGE DE FRANCE.

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME VIII. — ANNÉE 1863.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, n° 55.

1863

QA
1
J654
sér. 2
t. 8

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2journaldemat08liou

TABLE DES MATIÈRES,

DEUXIÈME SÉRIE. — TOME VIII.

Pages.

Mémoire sur les mouvements relatifs; par M. *Edmond Bour*. 1

Note sur la surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace; par M. *de la Gournerie*. 52

Sur la construction des équations du quatrième degré par les géomètres arabes; par M. *Wœpcke*. 57

Note au sujet d'un article publié dans le *Journal de Mathématiques*, tome VI, 2e série; par M. *E. de Jonquières*. 71

Nouveaux théorèmes concernant les nombres triangulaires; par M. *J. Liouville*. 73

Théorèmes concernant le quadruple d'un nombre premier de l'une ou de l'autre des deux formes $20k+3$, $20k+7$; par M. *J. Liouville*. 85

Sur la quadrature des surfaces du 2e ordre douées de centre; par M. *O. Schlömilch*. 89

Extrait d'une Lettre adressée à M. *Liouville* par M. *Schlömilch*. 99

Nouveau théorème concernant le quadruple d'un nombre premier de la forme $12k+5$; par M. *J. Liouville*. 102

Sur la forme $x^2+y^2+z^2+3t^2$; par M. *J. Liouville*. 105

Sur la forme $x^2+y^2+2z^2+2zt+2t^2$; par M. *J. Liouville*. 115

Sur la forme $x^2+y^2+z^2+zt+t^2$; par M. *J. Liouville*. 120

Sur la forme $x^2+y^2+2z^2+6t^2$; par M. *J. Liouville*. 124

Sur la forme $x^2+2y^2+2z^2+3t^2$; par M. *J. Liouville*. 129

Sur la forme $x^2+2y^2+4z^2+6t^2$; par M. *J. Liouville*. 134

Théorème concernant les nombres premiers contenus dans une quelconque des trois formes linéaires $168k+43$, $168k+67$, $168k+163$; par M. *J. Liouville*. 137

Sur la forme $x^2+xy+y^2+z^2+zt+t^2$; par M. *J. Liouville*. 141

Nouvelle théorie des diamètres; par M. *F. Lucas*. 145

Sur la forme $x^2+y^2+z^2+12t^2$; par M. *J. Liouville*. 161

Sur la forme $x^2+2y^2+2z^2+12t^2$; par M. *J. Liouville*. 169

Sur la forme $x^2+y^2+4z^2+12t^2$; par M. *J. Liouville*. 173

Pages.

Sur la forme $x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2$; par M. *J. Liouville*. 177
Sur la forme $3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2$; par M. *J. Liouville*. 179
Sur la forme $x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2$; par M. *J. Liouville*. 182
Sur la forme $x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2$; par M. *J. Liouville*. 185
Sur la forme $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2$; par M. *J. Liouville*. 189
Remarques nouvelles sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$; par M. *J. Liouville*. . . 193
Sur la forme $x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2$; par M. *J. Liouville*. 205
Sur la forme $x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2$; par M. *J. Liouville*. 209
Sur la forme $2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2$; par M. *J. Liouville*. 214
Sur la forme $x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$; par M. *J. Liouville*. 219
Sur la forme $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2)$; par M. *J. Liouville*. 225
Sur la forme $x^2 + xy + y^2 + 3(z^2 + t^2)$; par M. *J. Liouville*. 227
Sur la forme $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2$; par M. *J. Liouville*. 229
Sur la forme $3x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2$; par M. *J. Liouville*. 239
Sur la forme $3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2$; par M. *J. Liouville*. 241
Sur la forme $x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2$; par M. *J. Liouville*. 243
Sur la forme $x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2$; par M. *J. Liouville*. 249
Sur la forme $x^2 + 12y^2 + 12z^2 + 12t^2$; par M. *J. Liouville*. 253
Sur la forme $3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 48t^2$; par M. *J. Liouville*. 255
Mémoire sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope; par M. *de Saint-Venant*. (Premier article.). 257
Remarque nouvelle sur la forme $x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$; par M. *J. Liouville*. . . 296
Sur la surface qui coupe la courbe d'intersection de deux surfaces algébriques données dans les points de contact des plans osculateurs stationnaires; par M. *Clebsch*. 297
Sur la forme $x^2 + xy + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2$; par M. *J. Liouville*. 308
Extrait d'une Lettre de M. *Liouville* à M. *Besge*. 311
Solution d'un problème de géométrie; par M. *G. Mathet*. 313
Étude sur un certain mode de génération des surfaces d'étendue minimum; par M. *G. Mathet*. 323
Note sur les systèmes de surfaces orthogonales; par M. *V. Puiseux*. 335
Théorèmes généraux concernant des fonctions numériques; par M. *J. Liouville*. 347
Mémoire sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope; par M. *de Saint-Venant*. (Deuxième article.). 353
Théorème d'arithmétique; par M. *J. Liouville*. 431

ERRATA.

Page 80, ligne 16, *après* entiers, *ajoutez* (positifs).
Page 135, ligne 6, *au lieu de* mod. 3, *lisez* mod. 12.
Page 141, ligne 14, *au lieu de* valeur de n, *lisez* valeur de N.
Page 142, ligne 14, *au lieu de* $n = 12$, *lisez* $N = 12$.
Page 173, ligne 11, *au lieu de* $4z^2$, *lisez* z^2.
Page 198, ligne 2, *au lieu de* $N'_0(n) = \frac{2}{3} N'(n)$, *lisez* $N'_0(n) = \frac{2}{3} N_0(n) = N'(n)$.
Page 206, ligne 9, *au lieu de* $N_0(n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2)$,
lisez $N(n = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2)$.
Page 309, ligne 2, *au lieu de* $x = 0$, *lisez* $z = 0$.

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

APPLICATIONS DE MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

MÉMOIRE
SUR
LES MOUVEMENTS RELATIFS;

PAR M. EDMOND BOUR.

Présenté à l'Académie des Sciences le 25 février 1856.

A l'époque où je rédigeais ce Mémoire, les questions qui y sont traitées pouvaient offrir un certain intérêt d'actualité. Il n'en est plus de même aujourd'hui, tous ces problèmes ayant été surabondamment résolus par les méthodes les plus variées, et figurant depuis longtemps dans les traités les plus élémentaires d'analyse et de mécanique, voire même de physique.

Cependant je ne pense pas que les publications anciennes ou récentes sur cette matière soient de nature à faire du tort à un ouvrage tel que celui-ci, qui s'adresse avant tout aux géomètres, et où l'on se propose de développer certaines applications très-simples, mais dignes de quelque attention, à des problèmes intéressants, des belles méthodes de la *Mécanique analytique*.

La science des Lagrange et des Jacobi mérite bien, en effet, d'être cultivée pour elle-même; et il ne paraît pas inutile d'en multiplier les applications, car je sais par expérience qu'en écrivant sur ce sujet on s'expose à ne pas être compris, même de ceux qui, par l'*intitulé* de leurs travaux, sembleraient devoir être plus particulièrement au courant de la question.

Comme je tiens à ne me jamais rien attribuer au delà de ce que j'ai fait, je déclare d'avance, pour qu'on ne s'y trompe pas, que ce Mémoire ne renferme aucun principe vraiment nouveau : il est uniquement destiné à montrer comment la plupart des problèmes ordinaires de la dynamique se trouvent résolus, aussitôt qu'ils sont posés, par l'emploi des procédés de l'analyse transcendante. Avec ces méthodes, en effet, tous les détails intermédiaires, toutes les difficultés accessoires qui sont relatives à l'intégration des équations du mouvement ont été élucidées une fois pour toutes, lors de l'établissement de la théorie générale; et l'on n'a plus absolument à s'en préoccuper quand on aborde les applications particulières.

Chargé depuis quelque temps de l'enseignement de la Mécanique rationnelle à l'École Polytechnique, je crois à peine utile de dire que je n'ai point eu un seul instant la pensée d'introduire, même à titre d'essai, de pareilles méthodes dans des leçons élémentaires.

La clarté et la simplicité de l'exposition exigent impérieusement que, dans un cours de ce genre, tous les intermédiaires soient avec soin conservés et mis en lumière, chacun avec le jour qui lui convient; elles exigent qu'à côté de chaque propriété du mouvement on aperçoive pour ainsi dire sa raison d'être, de manière à saisir immédiatement dans les différents problèmes ce qu'ils ont de commun et ce par quoi ils diffèrent; elles exigent, en un mot, qu'en traitant de la mécanique, on laisse à l'analyse ce qui appartient à l'analyse, et que, tout en faisant largement appel aux secours de celle-ci, l'on n'envie pas aux géomètres purs le plaisir de contempler de haut et d'embrasser d'un coup d'œil le magnifique ensemble de toutes les branches de la science mathématique, dans leur harmonieuse corrélation.

Gray, 1862.

On sait qu'on peut considérer les mouvements relatifs comme des mouvements absolus, en ajoutant aux forces réellement agissantes deux forces fictives dont Coriolis a donné les expressions : ces forces sont des fonctions des coordonnées et des vitesses relatives des points mobiles, ainsi que des quantités qui définissent le mouvement du système mobile de comparaison.

Cette manière d'envisager les mouvements relatifs est celle qui se prête le mieux à une étude géométrique. Si l'on veut, au contraire, la traduire en analyse, comme les composantes des forces fictives contiennent les dérivées des coordonnées relatives, les équations différentielles prennent une forme toute différente de celle qu'on rencontre ordinairement dans la mécanique analytique, où les forces sont toujours supposées fonctions des coordonnées seulement.

Il suit de là que les méthodes générales paraissent ne pas s'appliquer à ces équations, au moins telles qu'elles sont immédiatement obtenues.

Pour les faire rentrer dans la règle commune, il n'y aurait évidemment qu'à recourir aux formules générales de Lagrange, qui donnent les équations différentielles du mouvement dans un système de variables quelconque.

Par une transformation de coordonnées, on exprimerait la fonction des forces et la demi-force vive absolue au moyen des coordonnées apparentes et du temps, et l'on obtiendrait indirectement les équations différentielles auxquelles satisfont les coordonnées relatives.

La théorie analytique et géométrique des mouvements relatifs n'est donc plus à faire : on a dès à présent tout ce qu'il faut pour traiter tous les problèmes qui peuvent se rencontrer, et pour achever la solution de ceux qui ne présentent pas de difficultés analytiques trop considérables; je crois cependant que l'exposition de la méthode que je propose ne sera pas entièrement dénuée d'intérêt, surtout au point de vue des applications. Il est d'ailleurs évident qu'au fond elle ne peut que rentrer dans celle de Lagrange, à un léger artifice près.

A l'exemple de Coriolis, je suppose que l'on considère le mouvement comme un mouvement absolu; et je montre comment on en obtient les équations sous la forme *canonique*, en ajoutant, à la fonction

des forces, des termes qui dépendent seulement des coordonnées apparentes et du temps. Ces termes additionnels, qui jouent ici un rôle analogue à celui des forces fictives de Coriolis, se divisent également en deux parties : la première dépend du déplacement de l'origine, et la seconde du changement de direction des axes.

L'utilité de mon travail ressortira d'ailleurs de quelques applications aux problèmes les plus célèbres en ce genre, problèmes jusqu'ici assez incomplétement étudiés ou résolus par approximation, tandis que ma méthode en fournit avec la plus grande facilité les intégrales rigoureuses.

Cette méthode se prête tout naturellement à l'application de la théorie de la variation des arbitraires, sous l'influence de certaines actions perturbatrices. En regardant comme termes perturbateurs ceux qui proviennent de la non-fixité des axes coordonnés, on pourra, dans plusieurs cas, se dispenser de tout calcul pour effectuer l'intégration du problème troublé, si l'on suppose connue celle du mouvement absolu correspondant.

Par exemple dans le problème, pourtant assez compliqué, de la rotation d'un corps quelconque autour de son centre de gravité, on reconnaît immédiatement qu'il suffit, pour obtenir les intégrales du mouvement relatif, d'ajouter un terme à l'une des intégrales données par Jacobi pour le cas du mouvement absolu, et de changer la valeur des constantes arbitraires qui figurent dans ces intégrales : il n'y a donc aucun nouveau calcul d'intégration. Dans le cas des problèmes plus rebelles, tels que celui du pendule, même à l'équateur, on trouve du moins avec une très-grande facilité la seule solution rationnelle de cette question célèbre ; c'est-à-dire le développement des intégrales en séries ordonnées suivant les puissances de la rotation de la terre, considérée comme quantité très-petite du premier ordre.

Un premier chapitre est consacré à l'étude du mouvement d'un ou de plusieurs points libres, je passe ensuite au cas d'un système à liaisons quelconques; je termine par les applications qui ont pour objet le mouvement des projectiles ainsi que celui du pendule simple dans le vide, et les différents cas de la rotation des corps solides autour de leur centre de gravité.

CHAPITRE PREMIER.

MOUVEMENT RELATIF D'UN ENSEMBLE DE POINTS LIBRES.

1. Soient Ox, Oy, Oz, trois axes rectangulaires mobiles auxquels on rapporte le mouvement d'un système de points libres; m_i, x_i, y_i, z_i, la masse et les coordonnées de l'un quelconque de ces points; enfin X_i, Y_i, Z_i, les composantes de la force motrice qui sollicite ce même point. Si les axes coordonnés étaient fixes, les équations du mouvement seraient

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= x'_i, & m_i\frac{dx'_i}{dt} &= X_i,\\ \frac{dy_i}{dt} &= y'_i, & m_i\frac{dy'_i}{dt} &= Y_i,\\ \frac{dz_i}{dt} &= z'_i, & m_i\frac{dz'_i}{dt} &= Z_i. \end{aligned}\right.$$

Je considère seulement les cas où les composantes X_i, Y_i, Z_i, sont les dérivées partielles d'une même fonction U des coordonnées x_i, y_i, z_i, des divers points mobiles : U est ce que l'on appelle la *fonction des forces;* de plus, je désigne par T la demi-somme des forces vives apparentes du système

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i(x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i);$$

enfin si je pose, avec M. Hamilton,

$$U - T = H,$$

on sait que la forme (1) peut être remplacée par la suivante :

$$(2)\qquad \frac{dx_i}{dt} = -\frac{dH}{d.m_i x'_i},\quad \frac{d.m_i x'_i}{dt} = \frac{dH}{dx_i}.$$

Si les axes sont mobiles, en désignant par u_i, v_i, w_i, les projections sur ces axes de l'accélération totale absolue du point dont la masse est m_i, on a toujours

$$(3)\qquad m_i u_i = \frac{dU}{dx_i},\quad m_i v_i = \frac{dU}{dy_i},\quad m_i w_i = \frac{dU}{dz_i}:$$

mais on n'a plus

$$u_i = \frac{dx'_i}{dt}, \quad v_i = \frac{dy'_i}{dt}, \quad w_i = \frac{dz'_i}{dt}.$$

Je vais commencer par calculer les nouvelles expressions des quantités u_i, v_i, w_i, quand les axes auxquels on rapporte le mouvement du système sont eux-mêmes animés d'un mouvement que je supposerai connu.

2. Soient CP, CQ, CR, trois axes rectangulaires fixes; p, q, r, les coordonnées par rapport à ces axes d'un point dont la masse est m; p', q', r', celles de l'origine mobile O; et enfin a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'', respectivement les cosinus des angles faits par les axes mobiles avec CP, CQ, CR : les formules de transformation qui servent à passer du système (Ox, Oy, Oz) au système (CP, CQ, CR) sont

$$(4) \quad \begin{cases} p = p' + ax + a'y + a''z, \\ q = q' + bx + b'y + b''z, \\ r = r' + cx + c'y + c''z; \end{cases}$$

d'où, en différentiant,

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} = \frac{dp'}{dt} + a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt} + x\frac{da}{dt} + y\frac{da'}{dt} + z\frac{da''}{dt}, \\ \frac{dq}{dt} = \frac{dq'}{dt} + b\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt} + x\frac{db}{dt} + y\frac{db'}{dt} + z\frac{db''}{dt}, \\ \frac{dr}{dt} = \frac{dr'}{dt} + c\frac{dx}{dt} + c'\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt} + x\frac{dc}{dt} + y\frac{dc'}{dt} + z\frac{dc''}{dt}. \end{cases}$$

Désignons par P, Q, R; P', Q', R', les projections sur les axes mobiles des vitesses absolues du point que l'on considère et de l'origine O, c'est-à-dire posons

$$(6) \quad \begin{cases} \mathrm{P} = a\frac{dp}{dt} + b\frac{dq}{dt} + c\frac{dr}{dt}, \\ \mathrm{Q} = a'\frac{dp}{dt} + b'\frac{dq}{dt} + c'\frac{dr}{dt}, \\ \mathrm{R} = a''\frac{dp}{dt} + b''\frac{dq}{dt} + c''\frac{dr}{dt}; \end{cases}$$

$$(7)\qquad \begin{cases} P' = a\dfrac{dp'}{dt} + b\dfrac{dq'}{dt} + c\dfrac{dr'}{dt}, \\ Q' = a'\dfrac{dp'}{dt} + b'\dfrac{dq'}{dt} + c'\dfrac{dr'}{dt}, \\ R' = a''\dfrac{dp'}{dt} + b''\dfrac{dq'}{dt} + c''\dfrac{dr'}{dt}, \end{cases}$$

et tirons des équations (5) les valeurs de P, Q, R : il suffit pour cela d'ajouter ces équations après les avoir multipliées respectivement par a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''.

Si je fais, pour abréger,

$$(8)\qquad \begin{cases} a''\dfrac{da'}{dt} + b''\dfrac{db'}{dt} + c''\dfrac{dc'}{dt} = \alpha, \\ a\dfrac{da''}{dt} + b\dfrac{db''}{dt} + c\dfrac{dc''}{dt} = \beta, \\ a'\dfrac{da}{dt} + b'\dfrac{db}{dt} + c'\dfrac{dc}{dt} = \gamma\,[*], \end{cases}$$

il vient

$$(9)\qquad \begin{cases} P = P' + \dfrac{dx}{dt} + \beta z - \gamma y, \\ Q = Q' + \dfrac{dy}{dt} + \gamma x - \alpha z, \\ R = R' + \dfrac{dz}{dt} + \alpha y - \beta x. \end{cases}$$

3. En continuant les calculs, qui n'offrent ni intérêt ni difficulté d'aucune espèce, on arriverait aux équations différentielles du mouvement. Ces équations sont du second ordre, et on peut, si l'on veut, les remplacer par un nombre double d'équations du premier ordre, en prenant pour variables auxiliaires les premières dérivées des inconnues x, y, z, c'est-à-dire en faisant

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad z' = \frac{dz}{dt}.$$

---

[*] On sait que ces quantités sont les composantes suivant les trois axes mobiles de la rotation instantanée du système de comparaison lié à ces axes.

Il est évident qu'il y a une infinité de systèmes de variables auxiliaires conduisant à un résultat du même genre. Or l'artifice dont j'ai fait usage consiste simplement à employer au lieu des dérivées, pour opérer la réduction au premier ordre, les quantités suivantes qui sont des fonctions linéaires de ces dérivées :

$$(10)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{dx}{dt} + \beta z - \gamma y, \\ \eta = \dfrac{dy}{dt} + \gamma x - \alpha z, \\ \zeta = \dfrac{dz}{dt} + \alpha y - \beta x. \end{cases}$$

J'introduis immédiatement ces nouvelles variables dans les équations (5), à la place de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; et ces équations deviennent

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{dp'}{dt} + a\xi + a'\eta + a''\zeta, \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{dq'}{dt} + b\xi + b'\eta + b''\zeta, \\ \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dr'}{dt} + c\xi + c'\eta + c''\zeta. \end{cases}$$

Comme elles sont maintenant tout à fait pareilles aux équations (4), il est évident qu'une deuxième différentiation conduira à une série d'équations de même forme que les précédentes; et si l'on désigne de même par u, v, w; u', v', w', les projections sur les axes mobiles des accélérations absolues du point que l'on considère et de l'origine O, on devra trouver en définitive

$$(12)\quad \begin{cases} u = u' + \dfrac{d\xi}{dt} + \beta\zeta - \gamma\eta, \\ v = v' + \dfrac{d\eta}{dt} + \gamma\xi - \alpha\zeta, \\ w = w' + \dfrac{d\zeta}{dt} + \alpha\eta - \beta\xi. \end{cases}$$

Rétablissons maintenant l'indice i; remplaçons u_i, v_i, w_i, par leurs

valeurs tirées des équations (3), et nous aurons les équations différentielles du mouvement

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} m_i \dfrac{d\xi_i}{dt} = \dfrac{d\mathrm{U}}{dx_i} - m_i u' + \gamma m_i \eta_i - \beta m_i \zeta_i, \\ m_i \dfrac{d\eta_i}{dt} = \dfrac{d\mathrm{U}}{dy_i} - m_i v' + \alpha m_i \zeta_i - \gamma m_i \xi_i, \\ m_i \dfrac{d\zeta_i}{dt} = \dfrac{d\mathrm{U}}{dz_i} - m_i w' + \beta m_i \xi_i - \alpha m_i \eta_i, \end{cases}$$

auxquelles il faut adjoindre le système (10), qui donne les dérivées par rapport au temps des variables principales x_i, y_i, z_i :

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \xi_i + \gamma y_i - \beta z_i, \\ \dfrac{dy_i}{dt} = \eta_i + \alpha z_i - \gamma x_i, \\ \dfrac{dz_i}{dt} = \zeta_i + \beta x_i - \alpha y_i. \end{cases}$$

4. Or ces équations, (I) et (II), se ramènent facilement à la forme canonique des équations (2), en déterminant convenablement la fonction H qui figure dans ces équations, et qui ne doit plus être ici la fonction d'Hamilton.

En effet, la demi-somme des forces vives apparentes est

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} \sum m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right],$$

ou, en remplaçant les dérivées par leurs valeurs en fonction de ξ_i, η_i, ζ_i :

$$(13)\quad \begin{cases} \mathrm{T} = \dfrac{1}{2} \sum m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) \\ \quad + \sum m_i [(\gamma y_i - \beta z_i)\xi_i + (\alpha z_i - \gamma x_i)\eta_i + (\beta x_i - \alpha y_i)\zeta_i] \\ \quad + \dfrac{1}{2} \sum m_i [(\gamma y_i - \beta z_i)^2 + (\alpha z_i - \gamma x_i)^2 + (\beta x_i - \alpha y_i)^2)]; \end{cases}$$

et l'on voit déjà que le système (II) revient à

$$(14)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{d\mathrm{T}}{d.m_i\xi_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{d\mathrm{T}}{d.m_i\eta_i}, \quad \frac{dz_i}{dt} = \frac{d\mathrm{T}}{d.m_i\zeta_i}.$$

Je pose maintenant

$$(15)\quad \begin{cases} K = -u'\sum m_i x_i - v'\sum m_i y_i - w'\sum m_i z_i, \\ G = \frac{1}{2}\sum m_i[(\gamma y_i - \beta z_i)^2 + (\alpha z_i - \gamma x_i)^2 + (\beta x_i - \alpha y_i)^2]\,[*]; \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} U + K + G = U_1, \\ U_1 - T = H. \end{cases}$$

Si l'on se rappelle que, d'après mes hypothèses, les quantités u', v', w'; α, β, γ, sont des fonctions données du temps t, indépendantes des coordonnées x_i, y_i, z_i, on verra facilement que la valeur (I) de $m_i \frac{d\xi_i}{dt}$ n'est autre chose que la dérivée de H par rapport à x_i. D'un autre côté, comme U_1 ne contient ni les dérivées x'_i, y'_i, z'_i, ni par suite les variables auxiliaires ξ_i, η_i, ζ_i, on a

$$\frac{dT}{d.m_i\xi_i} = -\frac{dH}{d.m_i\xi_i};$$

et l'on peut enfin remplacer les équations différentielles (I) et (II), ou (I) et (14), par les suivantes, où l'on reconnaît la forme canonique des équations ordinaires de la dynamique :

$$(III)\quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = -\frac{dH}{d.m_i\xi_i}, & \frac{d.m_i\xi_i}{dt} = \frac{dH}{dx_i}, \\ \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dH}{d.m_i\eta_i}, & \frac{d.m_i\eta_i}{dt} = \frac{dH}{dy_i}, \\ \frac{dz_i}{dt} = -\frac{dH}{d.m_i\zeta_i}, & \frac{d.m_i\zeta_i}{dt} = \frac{dH}{dz_i}. \end{cases}$$

De là le théorème fondamental que voici :

Théorème. — *Les équations différentielles du mouvement relatif*

---

[*] Je ferai remarquer que la quantité G est la demi-force vive que possède, en vertu de la rotation instantanée du système de comparaison, l'ensemble des points de ce système qui coïncident avec les divers points mobiles, à l'instant que l'on considère.

d'un système de points libres sont de même forme que celles d'un mouvement absolu, pourvu qu'à la fonction des forces on ajoute deux fonctions nouvelles que j'ai désignées par les lettres K *et* G :

La première dépend du mouvement de l'origine; elle est homogène et du premier degré par rapport aux coordonnées apparentes des points mobiles;

La deuxième est introduite par le changement de direction des axes; elle est homogène et du deuxième degré par rapport aux coordonnées.

CHAPITRE II.

MOUVEMENT RELATIF D'UN SYSTÈME A LIAISONS QUELCONQUES.

5. On sait qu'on peut remplacer les liaisons par des forces convenables, et considérer alors tous les points du système comme libres. Les équations différentielles que j'ai données dans le premier chapitre peuvent donc être conservées, à la condition d'introduire dans leurs deuxièmes membres des termes dont Lagrange a donné la forme, et qui représentent les composantes des forces provenant des liaisons du système. Si l'on désigne par p le nombre des équations qui expriment ces liaisons, par $L_k = 0$ l'une quelconque d'entre elles, et enfin par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, des coefficients indéterminés, les équations différentielles du mouvement peuvent s'écrire :

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} m_i \frac{d\xi_i}{dt} &= \frac{d(U_1 - T)}{dx_i} + \sum_{k=1}^{k=p} \lambda_k \frac{dL_k}{dx_i}, \\ m_i \frac{d\eta_i}{dt} &= \frac{d(U_1 - T)}{dy_i} + \sum_{k=1}^{k=p} \lambda_k \frac{dL_k}{dy_i}, \\ m_i \frac{d\zeta_i}{dt} &= \frac{d(U_1 - T)}{dz_i} + \sum_{k=1}^{k=p} \lambda_k \frac{dL_k}{dz_i} \text{ [*]}. \end{aligned}\right.$$

---

[*] *Mécanique analytique*, 3e édition, revue, corrigée et annotée par M. J. Bertrand. Tome Ier, note VI, page 409. Le calcul qui va suivre offre la plus grande analogie avec celui qui se trouve développé dans la note que je rappelle, pour le cas d'un mouvement absolu. C'est ce qui me dispensera d'insister sur quelques détails d'algèbre, qui ne présentent d'ailleurs aucune difficulté.

Les quantités L_k sont supposées données en fonction des coordonnées apparentes seulement.

Supposons maintenant, toujours avec Lagrange, qu'on ait profité des équations de liaison pour exprimer ces coordonnées apparentes en fonction d'autres inconnues,

$$q_1, \quad q_2, \ldots, \quad q_n,$$

réduites au plus petit nombre possible, et partant tout à fait indépendantes; et proposons-nous de chercher les équations différentielles auxquelles ces nouvelles variables doivent satisfaire.

Pour cela je multiplie les équations (17) respectivement par $\frac{dx_i}{dq_m}$, $\frac{dy_i}{dq_m}$, $\frac{dz_i}{dq_m}$ (m étant l'un des nombres entiers $1, 2, \ldots, n$); et je les ajoute à toutes les équations analogues qu'on obtiendrait en attribuant à l'indice i toutes les valeurs dont il est susceptible. Le premier membre de l'équation résultante est

$$\sum m_i \left(\frac{d\xi_i}{dt} \frac{dx_i}{dq_m} + \frac{d\eta_i}{dt} \frac{dy_i}{dq_m} + \frac{d\zeta_i}{dt} \frac{dz_i}{dq_m} \right);$$

quant au deuxième membre, il se compose de trois parties, et d'abord de

$$\sum \left(\frac{dU_1}{dx_i} \frac{dx_i}{dq_m} + \frac{dU_1}{dy_i} \frac{dy_i}{dq_m} + \frac{dU_1}{dz_i} \frac{dz_i}{dq_m} \right),$$

somme qui n'est autre chose que

$$\frac{dU_1}{dq_m}:$$

en effet, U_1 ne contient pas d'autres variables que les coordonnées x_i, y_i, z_i; plus les quantités qui dépendent du mouvement des axes, et qui sont considérées dans toutes ces transformations comme des constantes.

Une réduction du même genre n'a pas lieu pour T : le $\frac{dT}{dx_i}$ des équations (17) a été pris en supposant T exprimé en fonction de x_i, y_i, z_i; ξ_i, η_i, ζ_i, comme l'indique l'équation (13); or, dans la transformation

actuelle, je remplace x_i et ξ_i par leurs valeurs en fonction des nouvelles variables q_m et des dérivées q'_m de ces variables; on a donc

$$(18)\qquad \frac{dT}{dq_m} = \sum \frac{dT}{dx_i}\frac{dx_i}{dq_m} + \sum \frac{dT}{d\xi_i}\frac{d\xi_i}{dq_m},$$

en supposant, pour abréger l'écriture, que le signe $\sum$ indique non-seulement une sommation par rapport à l'indice i, mais encore la réunion des trois sommes analogues relatives à chacun des trois axes coordonnés.

On tire de l'équation (18)

$$\sum \frac{dT}{dx_i}\frac{dx_i}{dq_m} = \frac{dT}{dq_m} - \sum \frac{dT}{d\xi_i}\frac{d\xi_i}{dq_m}:$$

telle est la valeur de la deuxième partie du second membre de l'équation que nous cherchons à former; et il ne reste plus à considérer, dans les équations (17), que les termes qui contiennent les facteurs indéterminés λ_k; or ces termes, comme on le sait, disparaissent tous dans la somme. Il vient donc en définitive :

$$(19)\qquad \sum m_i \frac{d\xi_i}{dt}\frac{dx_i}{dq_m} + \frac{dT}{dq_m} - \sum \frac{dT}{d\xi_i}\frac{d\xi_i}{dq_m} = \frac{dU_1}{dq_m}.$$

6. Mais on a identiquement

$$(20)\qquad \sum m_i \frac{d\xi_i}{dt}\frac{dx_i}{dq_m} = \frac{d}{dt}\cdot\sum m_i\xi_i\frac{dx_i}{dq_m} - \sum m_i\xi_i\frac{d}{dt}\cdot\frac{dx_i}{dq_m};$$

d'un autre côté si, comme je l'ai supposé, les liaisons ne dépendent pas du temps, on trouvera facilement [*]

$$\frac{dx_i}{dq_m} = \frac{dx'_i}{dq'_m} = \frac{d\xi_i}{dq'_m}$$

et

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{dx_i}{dq_m} = \frac{dx'_i}{dq_m} = \frac{d}{dq_m}\cdot\frac{dT}{d.m_i\xi_i},$$

---

[*] *Mécanique analytique*, 3e édition, tome Ier, note VI, page 410.

en se rappelant que les équations (14) donnent

$$x'_i = \frac{dT}{d.m_i\xi_i};$$

on conclut de là

$$(21) \qquad \sum m_i\xi_i \frac{dx_i}{dq_m} = \sum m_i\xi_i \frac{d\xi_i}{dq'_m},$$

et

$$(22) \quad \sum m_i\xi_i \frac{d}{dt}\cdot\frac{dx_i}{dq_m} = \sum m_i\xi_i \frac{d}{dq_m}\cdot\frac{dT}{d.m_i\xi_i} = \frac{d}{dq_m}\sum \xi_i \frac{dT}{d\xi_i} - \sum \frac{dT}{d\xi_i}\frac{d\xi_i}{dq_m}.$$

En ayant égard aux relations (21) et (22), l'équation (20) devient

$$(23) \quad \sum m_i \frac{d\xi_i}{dt}\frac{dx_i}{dq_m} = \frac{d}{dt}\cdot\sum m_i\xi_i\frac{d\xi_i}{dq'_m} - \frac{d}{dq_m}\cdot\sum \xi_i\frac{dT}{d\xi_i} + \sum \frac{dT}{d\xi_i}\frac{d\xi_i}{dq_m};$$

et l'équation (19)

$$(24) \qquad \frac{d}{dt}\cdot\sum m_i\xi_i\frac{d\xi_i}{dq'_m} - \frac{d}{dq_m}\cdot\sum \xi_i\frac{dT}{d\xi_i} + \frac{dT}{dq_m} = \frac{dU}{dq_m}.$$

7. Si l'on se reporte maintenant à l'expression (13) de T, on reconnaît que cette fonction peut se décomposer en trois parties : la première est homogène et du second degré par rapport à ξ_i, η_i, ζ_i, je la désigne par T_2; j'appelle T_1 l'ensemble des termes qui sont du premier degré par rapport aux mêmes variables; c'est-à-dire que je fais

$$(25) \qquad T_2 = \frac{1}{2}\sum m_i(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2),$$

$$(26) \quad T_1 = \sum m_i[(\gamma y_i - \beta z_i)\xi_i + (\alpha z_i - \gamma x_i)\eta_i + (\beta x_i - \alpha y_i)\zeta_i];$$

quant à la troisième partie de T, c'est précisément la fonction G des équations (15), en sorte que l'on a

$$T = T_2 + T_1 + G.$$

L'introduction de ces notations permet de simplifier l'équation (24); en effet, d'une part,

$$\sum m_i\xi_i\frac{d\xi_i}{dq'_m} = \frac{dT_2}{dq'_m},$$

et, d'autre part, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$\sum \xi_i \frac{dT}{d\xi_i} = 2T_2 + T_1.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (24), et supprimant les termes qui se détruisent, il vient

$$(27) \qquad \frac{d}{dt} \cdot \frac{dT_2}{dq'_m} - \frac{d}{dq_m}(T_2 - G) = \frac{dU_1}{dq_m},$$

équation qu'on peut aussi écrire

$$(\mathrm{IV}) \qquad \frac{d}{dt} \cdot \frac{dT_2}{dq'_m} - \frac{dT_2}{dq_m} = \frac{d(U + K)}{dq_m}.$$

On obtiendra n équations de même forme, en attribuant successivement à l'indice m chacune des valeurs $1, 2, \ldots, n$; et l'on formera ainsi les équations différentielles du mouvement relatif dans un système d'inconnues quelconque $q_1, q_2, \ldots, q_n$, inconnues que nous supposons seulement réduites au plus petit nombre possible par le moyen des équations de liaison.

Les équations que nous venons de trouver remplissent, dans notre manière d'étudier les mouvements relatifs, le même rôle que les équations célèbres de Lagrange, dans la théorie ordinaire du mouvement absolu.

J'ai déjà dit que ces équations de Lagrange, qui servent pour des variables quelconques, s'appliquent évidemment au cas où les variables sont les coordonnées relatives ou des fonctions de ces coordonnées; et il est à peine nécessaire de faire remarquer que, si nos équations (27) ou (IV) ont une forme différente de la forme connue, c'est que T est ici la demi-force vive relative. On aurait toujours, avec l'illustre géomètre,

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{dT'}{dq'_m} - \frac{dT'}{dq_m} = \frac{dU}{dq_m},$$

si l'on désignait par T′ la demi-somme des forces vives réelles de tout le système.

8. Pour passer de la forme (IV) à la forme canonique, il n'y a qu'à faire subir aux équations précédentes une transformation tout à fait pareille à celle que Poisson et Hamilton ont appliquée aux équations de Lagrange. Posons donc

$$\frac{dT_2}{dq'_m} = p_m, \tag{28}$$

et profitons des n équations qu'on obtient en faisant successivement dans la précédente $m = 1, 2, \ldots, n$, pour éliminer $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$. En remplaçant ainsi ces dérivées par des expressions qui contiennent à la fois $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et $q_1, q_2, \ldots, q_n$, il est clair qu'on altérera les valeurs des dérivées de T_2 par rapport à ces dernières variables. Le calcul suivant va nous donner entre les dérivées, prises dans les deux systèmes de variables, les relations qui nous sont nécessaires pour achever la transformation.

La quantité T, considérée comme fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n; q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, est homogène et du deuxième degré par rapport aux dérivées; et l'on a

$$2T = \sum \frac{dT}{dq'_k} q'_k,$$

ce que l'on peut écrire

$$T = \sum \frac{dT}{dq'_k} q'_k - T.$$

Prenons la variation des deux membres en faisant varier toutes les variables à la fois; il vient

$$\delta T = \sum q'_k \delta . \frac{dT}{dq'_k} + \sum \frac{dT}{dq'_k} \delta q'_k - \sum \frac{dT}{dq_k} \delta q_k - \sum \frac{dT}{dq'_k} \delta q'_k,$$

ou, en supprimant les termes qui se détruisent,

$$\delta T = \sum q'_k \delta \frac{dT}{dq'_k} - \sum \frac{dT}{dq_k} \delta q_k. \tag{29}$$

Cela posé, rappelons-nous que nous avons fait

$$T = T_2 + T_1 + G,$$

d'où, en remarquant que G ne contient pas les dérivées des inconnues,

et que $\frac{dT_2}{dq'_k}$ est égal à p_k,

$$\frac{dT}{dq'_k} = p_k + \frac{dT_1}{dq'_k};$$

d'où enfin

$$(30) \qquad \delta . \frac{dT}{dq'_k} = \delta p_k + \delta . \frac{dT_1}{dq'_k}.$$

D'un autre côté, T_1 est du premier degré par rapport aux dérivées q'_k; par suite les quantités $\frac{dT_1}{dq'_k}$ en sont indépendantes, et ne contiennent pas d'autres variables que $q_1, q_2, \ldots, q_n$, donc

$$\delta . \frac{dT_1}{dq'_k} = \delta q_1 \frac{d}{dq_1} \cdot \frac{dT_1}{dq'_k} + \ldots + \delta q_n \frac{d}{dq_n} \cdot \frac{dT_1}{dq'_k}.$$

L'équation (30) devient ainsi :

$$\delta . \frac{dT}{dq'_k} = \delta p_k + \delta q_1 \frac{d}{dq_1} \cdot \frac{dT_1}{dq'_k} + \ldots + \delta q_n \frac{d}{dq_n} \cdot \frac{dT_1}{dq'_k};$$

et l'on a enfin pour la variation de T

$$(31) \quad \delta T = \sum q'_m \delta p_m + \sum \left(- \frac{dT}{dq_m} + q'_1 \frac{d}{dq_m} \cdot \frac{dT_1}{dq'_1} + \ldots + q'_n \frac{d}{dq_m} \cdot \frac{dT_1}{dq'_n} \right) \delta q_m,$$

le signe $\sum$ se rapportant à l'indice m.

Tel est le développement de δT suivant les variations des quantités p_m et q_m. Si donc on considère T comme une fonction de $p_1, p_2, \ldots, p_n; q_1, q_2, \ldots, q_n$, le coefficient de chacune des variations δp_m, δq_m fera connaître la dérivée partielle de T, prise par rapport à la variable correspondante : donc

$$(32) \qquad \frac{dT}{dp_m} = q'_m,$$

$$(33) \qquad \frac{dT}{dq_m} = - \frac{dT}{dq_m} + \frac{d}{dq_m} \cdot \sum q'_k \frac{dT_1}{dq'_k}.$$

Reportons-nous maintenant à l'expression (26) de T_1, et remplaçons

ξ_i, η_i, ζ_i, par leurs valeurs en fonction de x'_i, y'_i, z'_i; il vient

$$(34)\quad T_1 = \sum m_i[(\gamma y_i - \beta z_i)x'_i + (\alpha z_i - \gamma x_i)y'_i + (\beta x_i - \alpha y_i)z'_i] - 2G.$$

Donc $T_1 + 2G$ est une fonction homogène du premier degré de x'_i, y'_i, z'_i, et partant de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$; de plus

$$\frac{dT_1}{dq'_k} = \frac{d(T_1 + 2G)}{dq'_k},$$

donc

$$\sum q'_k \frac{dT_1}{dq'_k} = \sum q'_k \frac{d(T_1 + 2G)}{dq'_k} = T_1 + 2G,$$

et l'on peut écrire l'équation (33)

$$(35)\qquad \frac{dT}{dq_m} = -\frac{dT}{dq_m} + \frac{d(T_1 + 2G)}{dq_m} = -\frac{d(T_2 - G)}{dq_m}.$$

La dérivée par rapport à q_m, qui figure dans le premier membre de cette équation, est prise en supposant T exprimé en fonction des variables p_m et q_m; celle du troisième, au contraire, a été formée avant la substitution de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, à la place de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$; c'est donc la même que celle qui entre dans l'équation (27). Si je remplace cette quantité par sa valeur, l'équation (27) devient

$$\frac{dp_m}{dt} = \frac{dH}{dq_m}.$$

Quant aux dérivées par rapport au temps des variables q_m, elles sont données par l'équation (32), que l'on peut écrire

$$\frac{dq_m}{dt} = -\frac{dH}{dp_m},$$

puisque

$$\frac{dT}{dp_m} = -\frac{dH}{dp_m}.$$

En donnant à l'indice m toutes les valeurs dont il est susceptible, et supprimant la caractéristique spéciale d, qui n'a plus de raison d'être, on arrive enfin aux équations du mouvement, réduites à la forme ca-

nonique

$$(\mathrm{V})\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dq_1}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{H}}{dp_1}, \quad \dfrac{dp_1}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dq_1}, \\ \dfrac{dq_2}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{H}}{dp_2}, \quad \dfrac{dp_2}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dq_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dq_n}{dt} = -\dfrac{d\mathrm{H}}{dp_n}, \quad \dfrac{dp_n}{dt} = \dfrac{d\mathrm{H}}{dq_n}. \end{array}\right.$$

9. Avant de passer aux applications, récapitulons en quelques mots la série des opérations à effectuer pour mettre en équations chaque problème particulier.

L'expression générale de T_2 est

$$\mathrm{T}_2 = \frac{1}{2}\sum m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \frac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$
$$+ \sum m[(\beta z - \gamma y)x' + (\gamma x - \alpha z)y' + (\alpha y - \beta x)z'] + \mathrm{G}.$$

On aura d'abord à introduire, s'il y a lieu, dans cette équation les quantités $q_1, q_2, \ldots, q_n$; $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, à la place des coordonnées et des vitesses; on posera ensuite :

$$\frac{d\mathrm{T}_2}{dq'_1} = p_1, \quad \frac{d\mathrm{T}_2}{dq'_2} = p_2, \ldots, \quad \frac{d\mathrm{T}_2}{dq'_n} = p_n.$$

Il ne restera plus enfin qu'à profiter de ces relations pour éliminer les dérivées $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, et à poser

$$\mathrm{H} = \mathrm{U} + \mathrm{K} + \mathrm{G} - \mathrm{T},$$

pour avoir les équations différentielles du mouvement sous la forme canonique

$$\frac{dq_i}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dp_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dq_i}.$$

10. Ainsi que je l'ai annoncé, l'objet principal de ce Mémoire est de montrer, par la résolution de quelques problèmes un peu plus compliqués que les problèmes ordinaires des Traités de mécanique rationnelle, l'utilité des méthodes de la mécanique analytique, et les

avantages multiples qui résultent de la réduction des équations du mouvement à la forme canonique d'Hamilton et de Jacobi.

Dans toutes les applications qui vont suivre, on ne trouvera pas un seul exemple de l'intégration d'une équation différentielle : tout se réduira à des calculs algébriques, relatifs à la préparation de mon système de variables, et à une simple quadrature.

On sait en effet que, dès que l'on possède la moitié des intégrales d'un système d'équations de la forme (V), si ces intégrales satisfont à certaines conditions indiquées par M. Liouville [*], on trouve immédiatement par quadrature les intégrales en pareil nombre qui complètent la solution du problème.

Or, dans tous les problèmes sans exception qu'on est parvenu jusqu'ici à résoudre rigoureusement ou par approximation, cette première moitié des intégrales exactes ou approchées s'obtient à la simple inspection des équations différentielles du mouvement, ou plutôt de la fonction H qui définit à elle seule un problème de mécanique d'une manière complète. Il n'y a donc pas lieu, dans les questions qui vont nous occuper, d'intégrer des équations différentielles, encore moins de négliger des termes qui gênent pour achever la solution de la question, comme sont obligés de le faire la plupart des auteurs qui ont traité ces problèmes-là par les procédés ordinaires, puisqu'au moyen des méthodes de la mécanique analytique, tout se réduit à une quadrature fort simple.

11. Soient

$$(36)\qquad \begin{cases} \alpha = \varphi\,(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n, t), \\ \alpha_1 = \varphi_1\,(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n-1} = \varphi_{n-1}\,(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n, t), \end{cases}$$

les intégrales connues, dont on suppose que le nombre soit égal à n; si l'on désigne avec Poisson par (α, β) la fonction

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{d\alpha}{dq_i}\frac{d\beta}{dp_i} - \frac{d\alpha}{dp_i}\frac{d\beta}{dq_i} \right),$$

[*] *Journal de Mathématiques*, t. XX, p. 137.

les conditions qui doivent être remplies par les intégrales s'expriment en écrivant qu'on a identiquement

$$(37) \qquad (\alpha_m, \alpha_{m'}) = 0,$$

pour toutes les combinaisons deux à deux des intégrales (36); il faut de plus qu'on puisse tirer de ces intégrales les valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, en $q_1, q_2, \ldots, q_n, t$; et alors la quantité

$$\mathrm{H}dt + p_1 dq_1 + p_2 dq_2, \ldots + p_n dq_n,$$

ne peut manquer d'être une différentielle exacte $d\mathrm{V}$. La quantité V une fois connue par quadrature, on a pour les n intégrales qui restaient à trouver :

$$(38) \qquad \beta = -\frac{d\mathrm{V}}{d\alpha}, \quad \beta_1 = -\frac{d\mathrm{V}}{d\alpha_1}, \ldots, \quad \beta_{n-1} = -\frac{d\mathrm{V}}{d\alpha_{n-1}}.$$

Les intégrales (36) et (38) constituent ce qu'on appelle un *système canonique;* c'est-à-dire qu'elles vérifient, outre les conditions (37), les suivantes

$$(39) \qquad (\alpha_m, \beta_m) = 1, \quad (\alpha_m, \beta_{m'}) = 0, \quad (\beta_m, \beta_{m'}) = 0.$$

La solution étant ainsi préparée, si l'on suppose une *perturbation* dans le phénomène, perturbation dont l'effet soit d'ajouter à la fonction H une certaine fonction Ω, les quantités α_i, β_i, ne seront plus des constantes. On trouvera leurs variations en exprimant Ω en $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n, t$, et intégrant le système :

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{d\Omega}{d\beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{d\Omega}{d\alpha_i}.$$

12. Observons enfin que, dans le cas de mouvements relatifs terrestres, les quantités u', v', w'; α, β, γ, sont des constantes; si donc la question qu'on cherche à résoudre est une de celles auxquelles s'applique le principe des forces vives, le mouvement étant supposé absolu, le même principe ne cesse pas d'être applicable au cas du mouvement relatif. En d'autres termes, la quantité H ne contenant pas le temps explicitement, on aura évidemment toujours une première intégrale

des équations (V), en égalant cette quantité à une constante arbitraire α, c'est-à-dire en posant

$$\alpha = \Pi. \tag{40}$$

CHAPITRE III.

APPLICATIONS.

§ Ier. — *Mouvement des projectiles dans le vide.*

13. Comme il s'agit, dans cette question, de déterminer le mouvement d'un point libre, je ferai usage des équations (III) du chapitre Ier.

Ayant fait choix d'une origine quelconque, je prends le plan méridien pour plan des xz, je dirige l'axe des z suivant la parallèle à la partie nord de l'axe du globe, et je place Oy sur la tangente au parallèle, dans le sens de la rotation diurne.

Ce système de coordonnées donne pour les composantes de la rotation des axes :

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = n;$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= x' - ny, \\ \eta &= y' + nx, \\ \zeta &= z'; \end{aligned}\right. \tag{1}$$

et

$$T = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - n(x\eta - y\xi) + G. \tag{2}$$

Enfin, si je désigne par ω l'angle de la verticale avec l'axe Oz, angle qui est le complément de la latitude du lieu, et si je suppose que la masse du mobile soit égale à l'unité, j'ai pour les composantes de la pesanteur à l'origine (c'est-à-dire de la force qui sollicite un point matériel en équilibre relatif, placé au point précis qui a été pris pour origine des coordonnées) :

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{dU}{dx}\right)_0 - u' &= -g\sin\omega, \\ \left(\frac{dU}{dy}\right)_0 - v' &= 0, \\ \left(\frac{dU}{dz}\right)_0 - w' &= -g\cos\omega. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

J'admettrai que ces équations donnent aussi les composantes de la pesanteur en un point quelconque (x, y, z), c'est-à-dire que, dans toute l'étendue de l'espace parcouru par le projectile, la pesanteur reste constante en intensité et en direction.

Alors, si l'on n'a pas oublié que $-u'$, $-v'$, $-w'$, sont respectivement égaux à $\frac{dK}{dx}$, $\frac{dK}{dy}$, $\frac{dK}{dz}$, on pourra écrire les équations (3) ainsi :

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{d(U+K)}{dx} = -g\sin\omega, \\ \dfrac{d(U+K)}{dy} = 0, \\ \dfrac{d(U+K)}{dz} = -g\cos\omega; \end{cases}$$

d'où

$$(5)\qquad U + K = -g(x\sin\omega + z\cos\omega).$$

On a d'ailleurs

$$U_1 = U + K + G, \quad H = U_1 - T;$$

donc

$$(6)\qquad H = -g(x\sin\omega + z\cos\omega) - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + n(x\eta - y\xi);$$

et les équations différentielles du mouvement sont :

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \xi + ny, & \dfrac{d\xi}{dt} = -g\sin\omega + n\eta, \\ \dfrac{dy}{dt} = \eta - nx, & \dfrac{d\eta}{dt} = -n\xi, \\ \dfrac{dz}{dt} = \zeta, & \dfrac{d\zeta}{dt} = -g\cos\omega. \end{cases}$$

On connaît déjà une intégrale de ces équations; c'est celle des forces vives :

$$(8)\qquad \alpha = H.$$

Pour en trouver deux autres, nous remarquerons que les trois dernières équations différentielles contiennent seulement les variables ξ,

η, ζ; de sorte qu'on peut considérer séparément le système

$$(9)\qquad \frac{d\xi}{g\sin\omega - n\eta} = \frac{d\eta}{n\xi} = \frac{d\zeta}{g\cos\omega},$$

dont les intégrales sont :

$$(10)\qquad \alpha_1 = \sqrt{\xi^2 + \left(\eta - \frac{g\sin\omega}{n}\right)^2},$$

$$(11)\qquad \alpha_2 = \frac{n\zeta}{g\cos\omega} - \text{arc tang}\,\frac{\eta - \frac{g\sin\omega}{n}}{\xi}.$$

14. Pour achever la solution du problème, il faudrait maintenant résoudre les équations (8), (10) et (11), par rapport à ξ, η, ζ, et former la quantité

$$V = \int(\xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz + H\,dt).$$

Comme, ainsi qu'il est facile de le vérifier, les trois intégrales (α), (α_1), (α_2) satisfont aux conditions de M. Liouville, l'expression qui figure dans l'équation précédente sous le signe $\int$ est une différentielle exacte, et l'intégration de cette différentielle exacte ferait connaître la fonction V.

Comme il n'est pas *algébriquement* possible de tirer ξ, η, ζ des équations (8), (10) et (11), on pourrait résoudre ces mêmes équations par rapport à ξ, η, z, et remplacer V par la quantité

$$\int(\xi\,dx + \eta\,dy - z\,d\zeta + H\,dt),$$

qui jouit de propriétés analogues; mais l'intégration s'achève élégamment comme il suit.

Les équations (10) et (11) peuvent s'écrire, en introduisant un angle auxiliaire θ :

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \alpha_1\cos\theta,\\ \eta &= \frac{g\sin\omega}{n} + \alpha_1\sin\theta,\\ \zeta &= \frac{g\cos\omega}{n}(\alpha_2 + \theta). \end{aligned}\right.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de V, on trouve :

$$(13)\quad V = \int\left[\alpha_1\cos\theta dx + \left(\frac{g\sin\omega}{n} + \alpha_1\sin\theta\right)dy + \frac{g\cos\omega}{n}(\alpha_2+\theta)dz + \alpha dt\right],$$

d'où, en intégrant par parties,

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} V = {} & \alpha_1(x\cos\theta + y\sin\theta) + \frac{gy\sin\omega}{n} + \frac{gz\cos\omega}{n}(\alpha_2+\theta) + \alpha t \\ & - \int\left[\alpha_1(y\cos\theta - x\sin\theta) + \frac{gz\cos\omega}{n}\right]d\theta. \end{aligned}\right.$$

Mais on tire de l'équation $\alpha = H$, en y mettant les valeurs (12) de ξ, η, ζ :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} & \alpha_1(y\cos\theta - x\sin\theta) + \frac{gz\cos\omega}{n} \\ & = -\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{2}\frac{\alpha_1^2}{n} - \frac{1}{2}\frac{g^2\sin^2\omega}{n^3} - \frac{\alpha_1 g\sin\omega\sin\theta}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{g^2\cos^2\omega}{n^3}(\alpha_2+\theta)^2; \end{aligned}\right.$$

multipliant les deux membres par $d\theta$ et intégrant, il vient

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} & \int\left[\alpha_1(y\cos\theta - x\sin\theta) + \frac{gz\cos\omega}{n}\right]d\theta \\ & = -\left(\alpha + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\frac{g^2\sin^2\omega}{n^2}\right)\frac{\theta}{n} + \frac{\alpha_1 g\sin\omega\cos\theta}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{g^2\cos^2\omega}{n^3}\frac{(\alpha_2+\theta)^3}{3}. \end{aligned}\right.$$

La quadrature qui se trouve dans le premier membre de cette équation est précisément celle qui figure dans l'expression (14) de V; et en la remplaçant par sa valeur, on a

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} V = {} & \alpha\left(t + \frac{\theta}{n}\right) + \alpha_1\left[\left(x - \frac{g\sin\omega}{n^2}\right)\cos\theta + y\sin\theta\right] + \frac{1}{2}\alpha_1^2\frac{\theta}{u} \\ & + \frac{gz\cos\omega}{n}(\alpha_2+\theta) + \frac{1}{2}\frac{g^2\cos^2\omega}{n^3}\frac{(\alpha_2+\theta)^3}{3} + \frac{gy\sin\omega}{n} + \frac{1}{2}\frac{g^2\sin^2\omega}{n^3}\theta. \end{aligned}\right.$$

15. Il suffit maintenant de différentier cette fonction V par rapport aux constantes α, α_1, α_2, pour obtenir les trois dernières inté-

grales

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \beta &= -t - \frac{\theta}{n}, \\ \beta_1 &= -\alpha_1 \frac{\theta}{n} - \left[\left(x - \frac{g\sin\omega}{n^2}\right)\cos\theta + y\sin\theta\right], \\ \beta_2 &= -\frac{gz\cos\omega}{n} - \frac{1}{2}\frac{g^2\cos^2\omega}{n^3}(\alpha_2 + \theta)^2. \end{aligned}\right.$$

Sous cette forme, les intégrales sont disposées de telle sorte que chacune des nouvelles est la *conjuguée* de celle des premières qui porte le même indice, c'est-à-dire que l'on a

$$(\alpha_i, \beta_i) = 1;$$

en d'autres termes, les intégrales α, α_1, α_2; β, β_1, β_2, forment un système *canonique;* et c'est sous cette forme qu'il faudrait les conserver si l'on voulait faire varier les constantes arbitraires, pour étudier par exemple les influences perturbatrices de la résistance de l'air ou de la variation de la pesanteur sur le mouvement.

Je puis aussi écrire les dernières intégrales, en désignant par γ, γ_1, γ_2, trois nouvelles constantes arbitraires :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta = \gamma - nt, \\ &\left(x - \frac{g\sin\omega}{n^2}\right)\cos\theta + y\sin\theta = \frac{\alpha_1}{n}(\gamma_1 - \theta), \\ &(\alpha_2 + \theta)^2 = \frac{2n^2}{g\cos\omega}(\gamma_2 - z); \end{aligned}\right.$$

enfin je mets l'équation (15) des forces vives sous la forme

$$(20)\quad y\cos\theta - \left(x - \frac{g\sin\omega}{n^2}\right)\sin\theta = \mathrm{C},$$

en ayant égard aux équations (19), et posant

$$-\alpha_1 \mathrm{C} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{2}\frac{\alpha_1^2}{n} + \frac{1}{2}\frac{g^2\sin^2\omega}{n^3} + \gamma_2\frac{g\cos\omega}{n}.$$

16. La première des équations (19) indique que l'angle auxiliaire θ

décroît avec le temps d'une quantité proportionnelle à la rotation de la terre; les autres, jointes à l'équation (20), sont les équations de la trajectoire.

Prenons sur l'axe des x et dans le sens positif une longueur $OA = \frac{g \sin\omega}{n^2}$; par le point A ainsi déterminé menons un axe Ax_1 qui fasse avec Ox un angle θ compté, en ayant égard à son signe, dans le sens de la rotation de la terre; traçons un deuxième axe Ay_1 perpendiculaire à Ax_1, en continuant à tourner dans le sens de la rotation de la terre; prenons enfin le troisième axe Az_1 parallèle à Oz et rapportons la trajectoire aux trois axes mobiles Ax_1, Ay_1, Az_1.

Les formules de transformation sont

$$(21)\qquad \begin{cases} x_1 = y \sin\theta + \left(x - \frac{g \sin\omega}{n^2}\right) \cos\theta, \\ y_1 = y \cos\theta - \left(x - \frac{g \sin\omega}{n^2}\right) \sin\theta, \\ z_1 = z. \end{cases}$$

Les équations de la trajectoire deviennent dans ce système d'axes :

$$(22)\qquad \begin{cases} x_1 = \frac{\alpha_1}{n}(\gamma_1 - \theta), \\ y_1 = C, \\ z_1 = \gamma_2 + \frac{1}{2}\frac{g \cos\omega}{n^2}(\alpha_2 + \theta)^2; \end{cases}$$

ou, en éliminant l'angle auxiliaire θ,

$$(23)\qquad \begin{cases} y_1 = C, \\ z_1 = \gamma_2 + \frac{1}{2}\frac{g \cos\omega}{n^2}\left(\alpha_2 + \gamma_1 - n\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^2, \end{cases}$$

équations d'une parabole dont le plan tourne uniformément, ainsi que le plan $x_1 A z_1$, avec une vitesse égale et contraire à celle de la terre, en restant à une distance invariable de ce plan $x_1 A z_1$.

§ II. — *Mouvement d'un corps solide de révolution complétement libre de tourner autour de son centre de gravité maintenu fixe sur la terre.*

17. Je rapporte le mouvement aux axes que j'ai déjà employés dans le problème précédent, de sorte que les valeurs des quantités α, β, γ; ξ, η, ζ, restent les mêmes. Quant à la fonction T_2 dont j'ai donné l'expression générale au n° **9**, elle devient, en ayant égard aux valeurs de α, β, γ,

$$(1) \qquad T_2 = T + n \sum m(xy' - yx') + G.$$

Cela posé, on sait que les liaisons du système permettent d'exprimer les coordonnées de chaque point mobile au moyen de quantités constantes, et de trois angles variables θ, φ, ψ, dont voici la définition.

Si je désigne par Ox_1, Oy_1, Oz_1 les trois axes principaux d'inertie qui se croisent au centre de gravité du solide considéré :

θ est l'angle de Oz_1, avec Oz;

$\psi - 90^\circ$ est l'angle que la projection de Oz_1 sur le plan xOy fait avec Ox;

φ est l'angle que Ox_1 fait avec la partie de l'intersection des plans x_1Oy_1 et xOy, déterminée par l'angle ψ.

Le solide dont nous étudions le mouvement est supposé de révolution autour de Oz_1; ou, plus généralement, les moments d'inertie autour des axes Ox_1 et Oy_1 ont une valeur commune A, C étant le moment qui se rapporte au troisième axe Oz_1.

Les quantités qui entrent dans le deuxième membre de l'équation (1) ont alors les expressions suivantes, dont le calcul ne présente aucune difficulté, et qui sont d'ailleurs bien connues :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}\left[A(\theta'^2 + \sin^2\theta \,.\, \psi'^2) + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2\right], \\ \sum m(xy' - yx') &= A\sin^2\theta.\psi' + C\cos\theta(\varphi' + \psi'\cos\theta), \\ G &= \tfrac{1}{2}n^2(A\sin^2\theta + C\cos^2\theta); \end{aligned} \right.$$

d'où

$$(3)\quad \begin{cases} T_2 = \frac{1}{2}[A(\theta'^2 + \sin^2\theta . \psi'^2) + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2] \\ \quad + n[A\sin^2\theta . \psi' + C\cos\theta(\varphi' + \psi'\cos\theta)] + G. \end{cases}$$

On déduit de cette équation les valeurs des variables conjuguées de θ, ψ, φ, qu'il faut introduire à la place de θ', ψ', φ', pour l'application de la méthode; ce sont :

$$(4)\quad \begin{cases} \Theta = \frac{dT_2}{d\theta'} = A\theta', \\ \Psi = \frac{dT_2}{d\psi'} = A\sin^2\theta . \psi' + C\cos\theta(\varphi' + \psi'\cos\theta) + An\sin^2\theta + Cn\cos^2\theta, \\ \Phi = \frac{dT_2}{d\varphi'} = C(\varphi' + \psi'\cos\theta) + Cn\cos\theta. \end{cases}$$

Je tire de ces équations

$$\theta' = \frac{\Theta}{A},$$

$$\psi' = \frac{\Psi - \Phi\cos\theta}{A\sin^2\theta} - n,$$

$$\varphi' + \psi'\cos\theta = \frac{\Phi}{C} - n\cos\theta;$$

je substitue ces valeurs dans l'expression de T, et il vient

$$(5)\qquad T = \frac{1}{2}\left[\frac{\Theta^2}{A} + \frac{(\Psi - \Phi\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} + \frac{\Phi^2}{C}\right] - n\Psi + G.$$

D'ailleurs, comme le centre de gravité est maintenu fixe, la pesanteur est détruite; or nous avons trouvé pour les composantes de cette force supposée constante:

$$\frac{dU}{dx_i} - m_i u' = \frac{d(U+K)}{dx_i},$$

$$\frac{dU}{dy_i} - m_i v' = \frac{d(U+K)}{dy_i},$$

$$\frac{dU}{dz_i} - m_i w' = \frac{d(U+K)}{dz_i}:$$

donc l'équation qui exprime que la pesanteur est détruite est

$$U + K = 0.$$

Dans cette hypothèse, on a simplement :

$$U_1 = G,$$

d'où

$$(6) \qquad H = G - T = -\frac{1}{2}\left[\frac{\Theta^2}{A} + \frac{(\Psi - \Phi\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} + \frac{\Phi^2}{C}\right] + n\Psi.$$

18. Sans qu'il soit besoin d'écrire les équations différentielles du problème, il suffit de se rappeler leur forme, et de remarquer que H ne contient ni ψ, ni φ, pour voir que deux de ces équations

$$\frac{d\Psi}{dt} = 0, \qquad \frac{d\Phi}{dt} = 0,$$

sont immédiatement intégrables.

En réunissant aux intégrales ainsi obtenues sans grand effort de calcul l'intégrale connue des forces vives, et remarquant que les conditions d'intégrabilité sont satisfaites, on a de suite tout ce qu'il faut pour former la fonction V et par conséquent pour achever l'intégration. Nos trois intégrales sont :

$$(7) \qquad \begin{cases} \alpha = H, \\ \alpha_1 = \Psi, \\ \alpha_2 = \Phi. \end{cases}$$

La résolution de ces équations par rapport à Ψ, Φ et Θ ne présente non plus aucune difficulté. En effet, on a d'abord

$$\Psi = \alpha_1, \qquad \Phi = \alpha_2;$$

et une fois ces valeurs connues, en ayant égard à l'expression (6) de H, on tire de l'équation $H = \alpha$:

$$\Theta = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{-(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + 2\alpha_1\alpha_2\cos\theta + \left[2A(n\alpha_1 - \alpha) - \left(\frac{A}{C} - 1\right)\alpha_2^2\right]\sin^2\theta},$$

relation que j'écrirai ainsi :

$$(8)\quad \Theta = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{-(\Phi^2+\Psi^2)+2\Phi\Psi\cos\theta+[2A(n\Psi-H)-(\mu-1)\Phi^2]\sin^2\theta},$$

en faisant $\mu = \frac{A}{C}$, et remplaçant les constantes α, α_1, α_2, par les quantités H, Ψ, Φ, qui leur sont égales, et dont la signification est mieux indiquée.

De là l'expression suivante pour la fonction V :

$$(9)\left\{\begin{aligned} &V = Ht + \Psi\psi + \Phi\varphi,\\ &+\int\frac{d\theta}{\sin\theta}\sqrt{-(\Phi^2+\Psi^2)+2\Phi\Psi\cos\theta+[2A(n\Psi-H)-(\mu-1)\Phi^2]\sin^2\theta}.\end{aligned}\right.$$

La quadrature qui se trouve dans cette expression étant effectuée, il suffira de différentier la fonction V par rapport aux constantes α, α_1, α_2, ou aux quantités H, Ψ, Φ, qui tiennent la place de ces constantes, pour avoir les trois dernières intégrales :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \beta &= -\frac{dV}{dH},\\ \beta_1 &= -\frac{dV}{d\Psi},\\ \beta_2 &= -\frac{dV}{d\Phi}.\end{aligned}\right.$$

On peut aussi déterminer chacune de ces intégrales séparément, en appliquant à l'équation (9) les règles de la différentiation sous le signe somme : c'est ce dernier mode de calcul que je choisis, et je commence par former l'intégrale qui contient le temps.

19. On trouve pour cette intégrale

$$(\beta + t) = A\int\frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{-(\Phi^2+\Psi^2)+2\Phi\Psi\cos\theta+[2A(n\Psi-H)-(\mu-1)\Phi^2]\sin^2\theta}}:$$

ou, en posant $\cos\theta = x$,

$$(11)\quad \beta + t = -A\int\frac{dx}{\sqrt{2A(n\Psi-H)-\Psi^2-\mu\Phi^2+2\Phi\Psi x-[2A(n\Psi-H)-(\mu-1)\Phi^2]x^2}}.$$

Pour intégrer cette expression, je remarque que la quantité

$$2A(n\Psi - H) - (\mu - 1)\Phi^2$$

est toujours positive : elle est même toujours plus grande que Φ^2 et que Ψ^2. Pour s'assurer de ce fait, il suffit de substituer à H sa valeur (6); on trouve en effet :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} 2A(n\Psi - H) - (\mu - 1)\Phi^2 &= \Phi^2 + \Theta^2 + \frac{(\Psi - \Phi\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}, \\ &= \Psi^2 + \Theta^2 + \frac{(\Phi - \Psi\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}, \end{aligned}\right.$$

équations qui démontrent ce que j'ai avancé.

Le coefficient de x^2 sous le radical étant ainsi toujours négatif, je puis représenter ce radical par

$$(13)\qquad M\sqrt{1 - \cos^2\omega} = M\sin\omega,$$

en désignant par ω un angle auxiliaire donné par une équation de la forme

$$(14)\qquad \cos\omega = ax - b = a\cos\theta - b.$$

J'introduis ainsi trois coefficients indéterminés M, a et b, qui nous permettront d'identifier notre radical avec l'expression (13); en effet, on doit avoir

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &2A(n\Psi - H) - \Psi^2 - \mu\Phi^2 + 2\Phi\Psi x - [2A(n\Psi - H) - (\mu - 1)\Phi^2]x^2 \\ &\qquad = M^2[1 - (ax - b)^2], \end{aligned}\right.$$

pour toutes les valeurs de x. Or ceci entraîne les trois équations :

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} M^2a^2 &= 2A(n\Psi - H) - (\mu - 1)\Phi^2, \\ M^2ab &= \Phi\Psi, \\ M^2(1 - b^2) &= 2A(n\Psi - H) - \Psi^2 - \mu\Phi^2, \end{aligned}\right.$$

qui font connaître nos trois indéterminées M, α et b.

On peut alors substituer dans l'intégrale (11), à la place de x, la variable ω définie par l'équation (14); et l'expression du temps devient, par un calcul très-simple,

$$(17) \qquad \beta + t = \frac{A}{Ma}\,\omega,$$

ce qui donne pour la valeur de l'angle auxiliaire ω

$$(18) \qquad \omega = K(t + \beta),$$

en posant

$$\frac{Ma}{A} = K.$$

L'équation qui donne θ en fonction du temps s'obtient en éliminant ω entre les équations (14) et (18); on a :

$$a\cos\theta - b = \cos K(t + \beta),$$

ou, en remplaçant a et b par leurs valeurs tirées des équations (16),

$$(19) \quad A^2K^2\cos\theta = \Phi\Psi + \sqrt{A^2K^2 - \Phi^2}\,\sqrt{A^2K^2 - \Psi^2}\cos K(t + \beta).$$

20. Passons au calcul des deux dernières intégrales, et cherchons les valeurs de $\frac{dV}{d\Psi}$ et $\frac{dV}{d\Phi}$.

On a

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta_1 = -\frac{dV}{d\Psi} = -\psi + \int \frac{(\Psi - \Phi\cos\theta)\,d\theta}{\sin\theta\sqrt{-(\Phi^2+\Psi^2) + 2\Phi\Psi\cos\theta + A^2K^2\sin^2\theta}} \\ - An\int \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{-(\Phi^2+\Psi^2) + 2\Phi\Psi\cos\theta + A^2K^2\sin^2\theta}}, \end{aligned} \right.$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta_2 = -\frac{dV}{d\Phi} = -\varphi + \int \frac{(\Phi - \Psi\cos)\,d\theta}{\sin\theta\sqrt{-(\Phi^2+\Psi^2) + 2\Phi\Psi\cos\theta + A^2K^2\sin^2\theta}} \\ + (\mu - 1)\Phi\int \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{-(\Phi^2+\Psi^2) + 2\Phi\Psi\cos\theta + A^2K^2\sin^2\theta}}. \end{aligned} \right.$$

Dans l'expression de β_1 entrent deux quadratures; je représente la première par ψ_1, je vais la calculer tout à l'heure; la deuxième est, à

un facteur constant près, celle qui est égale à $\beta + t$, de sorte que l'on a

$$(22) \qquad \beta_1 + \psi = \psi_1 - n(\beta + t);$$

on trouverait de même

$$(23) \qquad \beta_2 + \varphi = \varphi_1 + (\mu - 1)\frac{\Phi}{A}(\beta + t) = \varphi_1 + K'(\beta + t),$$

en désignant par φ_1 la première quadrature qui figure dans la valeur de β_2, et posant

$$K' = (\mu - 1)\frac{\Phi}{A}.$$

Il ne reste plus qu'à trouver les valeurs de ψ_1 et φ_1; or ces valeurs sont données par les équations

$$(24) \qquad \cos\psi_1 = \frac{\Phi - \Psi\cos\theta}{\sin\theta\sqrt{A^2K^2 - \Psi^2}},$$

$$(25) \qquad \cos\varphi_1 = \frac{\Psi - \Phi\cos\theta}{\sin\theta\sqrt{A^2K^2 - \Phi^2}},$$

comme il est facile de le vérifier.

21. Les équations (19), (24) et (25) s'interprètent géométriquement d'une manière remarquable. Posons en effet, en introduisant deux angles constants γ_1 et γ_2 :

$$(26) \qquad \begin{cases} \Psi = AK\cos\gamma_1, \\ \Phi = AK\cos\gamma_2, \end{cases}$$

ce qui est permis, puisque j'ai prouvé que M^2a^2 ou A^2K^2 est toujours plus grand que Φ^2 et que Ψ^2; on peut alors écrire les équations dont il s'agit sous la forme :

$$(27) \qquad \begin{cases} \cos\theta = \cos\gamma_1\cos\gamma_2 + \sin\gamma_1\sin\gamma_2\cos K(t + \beta), \\ \cos\gamma_1 = \cos\gamma_2\cos\theta + \sin\gamma_2\sin\theta\cos\varphi_1, \\ \cos\gamma_2 = \cos\gamma_1\cos\theta + \sin\gamma_1\sin\theta\cos\psi_1; \end{cases}$$

c'est-à-dire que $K(t + \beta)$, φ_1 et ψ_1 sont les trois angles d'un triangle sphérique dont les côtés respectivement opposés sont, θ, γ_1, γ_2.

22. Concevons que du point O comme centre on décrive une sphère de rayon quelconque ; soient x, y, z, x_1, y_1, z_1, les points où cette sphère est percée par les trois axes coordonnés et les axes principaux d'inertie du corps; supposons enfin, pour un instant, qu'on néglige le terme $-n(\beta+t)$ dans la valeur (22) de ψ.

Je mène un arc de grand cercle zA, qui fasse avec zx un angle égal à $-(90^\circ+\beta_1)$; je prends $z\mathrm{A}=\gamma_1$, et je dis que le triangle $zz_1\mathrm{A}$ est précisément celui dont j'ai parlé au n° **21**. En effet, le côté zA est égal à γ_1, le côté zz_1 est égal à θ, et quant à l'angle compris entre ces deux côtés, on a :

$$z_1z\mathrm{A}=\psi-90^\circ-(-90^\circ-\beta_1)=\beta_1+\psi=\psi_1,$$

puisque je supprime provisoirement le terme $-n(\beta+t)$.

Il suit de là que les autres éléments du triangle ont les valeurs que j'ai indiquées ci-dessus; ainsi l'angle dont le sommet est en A se trouve égal à $\mathrm{K}(t+\beta)$, et le côté $\mathrm{A}z_1$ est égal à γ_2. Donc

Si l'on conçoit un arc de grand cercle égal à γ_2 qui tourne uniformément autour de son extrémité fixe A, *avec une vitesse angulaire égale à* K, *l'extrémité mobile de cet arc de grand cercle sera à chaque instant le lieu du point z_1. En d'autres termes, l'axe de figure du corps décrit un cône de révolution qui a pour axe* OA, *et pour demi-angle au sommet γ_2.*

Pour se faire une idée complète du mouvement du corps, il faut supposer que, pendant que son axe de figure décrit le cône que j'ai défini, les axes $\mathrm{O}x_1$ et $\mathrm{O}y_1$ tournent eux-mêmes autour de cet axe de figure avec une vitesse constante égale à K'. Les éléments constants du mouvement K, K', γ_1, γ_2, etc., sont des fonctions des constantes arbitraires qu'introduit l'intégration ; ils se déterminent au moyen des circonstances du mouvement initial, qui doivent être connues.

On déduirait facilement de tout ceci que, si l'on fait toujours abstraction du terme $-n(\beta+t)$, le mouvement peut être considéré comme produit par le roulement d'un cône de révolution lié au corps, sur un autre cône de révolution qui serait fixe par rapport à la terre, et dont l'axe serait OA ; mais je ne m'arrête pas à développer ces résultats bien connus.

23. On a reconnu dans les lois qui précèdent celles qui régissent le

mouvement de rotation des corps de révolution, rapportés à des axes coordonnés immobiles. Ainsi, tant qu'on ne tient pas compte du terme que nous avons supprimé dans l'expression de ψ, les lois du mouvement relatif ont absolument la même forme que celles du mouvement absolu.

Si l'on analyse maintenant l'influence de la rotation de la terre, on trouve que cette influence est double.

1° Elle modifie d'abord les intégrales premières (7), mais sans rien changer aux lois du mouvement, comme le prouve la discussion précédente. Seulement les éléments de ce mouvement ne sont plus les mêmes; en effet, les constantes arbitraires H, Φ et Ψ ont pour valeurs

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}n^2(A\sin^2\theta_0 + C\cos^2\theta_0) \\ &\quad - \frac{1}{2}[A(\theta_0'^2 + \sin^2\theta_0\,\psi_0'^2) + C(\varphi_0' + \psi_0'\cos\theta_0)^2], \\ \Psi &= A\sin^2\theta_0\,\psi_0' + C\cos\theta_0(\varphi_0' + \psi_0'\cos\theta_0) + n(A\sin^2\theta_0 + C\cos^2\theta_0), \\ \Phi &= C(\varphi_0' + \psi_0'\cos\theta_0) + Cn\cos\theta_0, \end{aligned}\right.$$

comme on le trouve en faisant $t = 0$ dans les équations (4) et (6). Si n était nul, on aurait simplement :

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2}[A(\theta_0'^2 + \sin^2\theta_0\,\psi_0'^2) + C(\varphi_0' + \psi_0'\cos\theta_0)^2], \\ \Psi &= A\sin^2\theta_0\,\psi_0' + C\cos\theta_0(\varphi_0' + \psi_0'\cos\theta_0), \\ \Phi &= C(\varphi_0' + \psi_0'\cos\theta_0). \end{aligned}\right.$$

2° Cette même influence se manifeste encore en introduisant le terme $-n(\beta + t)$ dans l'équation (22), ce qui modifie les lois précédentes. Pour passer d'ailleurs du cas fictif que j'ai considéré d'abord au cas du mouvement tel qu'il a réellement lieu, il suffit de supposer que le point A, au lieu d'être fixe, tourne lui-même autour de Oz, avec une vitesse constante égale à $-n$. La combinaison des trois mouvements de rotation que j'ai définis et qui ont lieu autour de Oz, OA, Oz_1, avec des vitesses respectivement égales à $-n$, K, K′, résout le problème que je m'étais proposé.

24. *Note de l'Auteur* (1862). — La solution que je viens d'exposer

est pour ainsi dire exclusivement géométrique; elle revient en définitive à rapporter un mouvement bien connu à un système particulier d'axes coordonnés, et elle est parfaitement rigoureuse, si l'on néglige les variations de la pesanteur.

Plusieurs auteurs, et entre autres mon ami M. Resal [*], ont traité la même question par la méthode de Coriolis, en cherchant le couple résultant des forces apparentes et appliquant ensuite la théorie ordinaire de la rotation des corps solides.

Sans développer les calculs auxquels conduit cette méthode, je donnerai ici les composantes du couple terrestre, suivant trois axes qui sont respectivement : l'axe de figure du corps, l'intersection de l'équateur de ce corps avec notre plan des xy, et enfin un troisième axe perpendiculaire aux deux premiers [**].

Je conserve les mêmes notations que précédemment; de plus, je désigne par n_1 *la projection de la rotation instantanée du corps sur son axe de figure;* c'est-à-dire que je fais, pour simplifier,

$$n_1 = \varphi' + \psi' \cos\theta.$$

Cela posé, les trois couples composants sont respectivement :

1° Sur l'axe de figure,

$$N = Cn \sin\theta \frac{d\theta}{dt};$$

2° Sur la ligne des nœuds,

$$N_1 = -Cnn_1 \sin\theta + (A - C)\, n^2 \sin\theta \cos\theta + An \sin\theta \cos\theta \frac{d\psi}{dt};$$

3° Enfin sur le troisième axe,

$$N_2 = -An \cos\theta \frac{d\theta}{dt}.$$

---

[*] *Annales des Mines,* 5e série, passim, et *Traité de Cinématique pure,* 1 volume; Mallet-Bachelier; 1862.

[**] Ces axes, dont l'idée fort ingénieuse est due à M. Resal, sont mobiles à la fois dans le corps et dans l'espace. L'emploi de ce système de coordonnées simplifie beaucoup l'exposition élémentaire de la théorie de la rotation des corps, qui ont deux de leurs moments d'inertie principaux égaux.

Si l'axe du corps est maintenu fixe sur la terre, on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = 0;$$

les couples N et N_2 sont nuls, et le couple N_1 devient

$$N'_1 = -Cnm_1 \sin\theta + (A - C)\, n^2 \sin\theta \cos\theta,$$

soit sensiblement

$$N'_1 = -Cnm_1 \sin\theta,$$

en négligeant le terme multiplié par n^2.

Dans ce cas, l'influence de la rotation de la terre se traduit par une sorte de pesanteur qui tend à entraîner l'axe de figure (lequel est aussi axe de rotation effectif) dans la direction de l'axe terrestre; c'est probablement là ce que l'on a appelé la *tendance des axes de rotation au parallélisme*.

Mais une chose qu'il importe bien de remarquer, chose caractéristique de ces forces apparentes qui dépendent des vitesses, c'est que, dès que l'axe du corps se déplace, cet axe se trouve immédiatement soumis à trois nouveaux couples; tout comme un corps qui tombe obéit à la force centrifuge composée, tandis qu'un corps en équilibre n'est soumis à aucune action de ce genre.

Réduire le couple terrestre au seul couple N'_1, c'est en quelque façon négliger la force centrifuge composée dans l'étude des mouvements pendulaires ou autres; et mes formules montrent bien que l'erreur commise n'est pas du second ordre, mais bien du premier ordre par rapport à la quantité très-petite n. Cette erreur pourra très-bien d'ailleurs être sans aucune importance dans certains cas particuliers, mais elle pourra aussi en avoir une très-grande dans d'autres; il sera donc prudent de prendre ses précautions.

J'ai traité la question qui fait l'objet de ce paragraphe avec d'assez grands développements, d'abord à cause de l'importance du problème, et ensuite afin de faire voir combien ma méthode conduit facilement à une solution analytique élégante.

Je vais montrer mieux encore combien cette nouvelle méthode est

naturelle, et comment il semble qu'elle constitue la véritable manière de réduire les mouvements relatifs aux mouvements absolus. Dans certaines questions, en effet (et par exemple dans celle que je viens d'étudier), mon analyse, ou plutôt celle de Lagrange, fait connaître immédiatement, et sans différentiation ni quadrature, toutes les intégrales du mouvement relatif, quand on connaît celles du mouvement absolu.

C'est ce qui résultera de la résolution du problème que je traite dans le paragraphe suivant, problème dont celui qui vient de m'occuper n'est d'ailleurs qu'un cas particulier.

§ III. — *Mouvement d'un corps solide quelconque autour de son centre de gravité.*

25. Je conserve les mêmes axes et les mêmes notations que dans le problème précédent, en supposant seulement que les trois moments d'inertie principaux aient maintenant des valeurs différentes A, B, C.

Désignons par p, q, r, les composantes de la rotation instantanée du corps suivant les trois axes Ox_1, Oy_1, Oz_1; c'est-à-dire posons :

$$(1)\qquad \begin{cases} p = \sin\varphi \sin\theta \,.\, \psi' + \cos\varphi \,.\, \theta', \\ q = \cos\varphi \sin\theta \,.\, \psi' - \sin\varphi \,.\, \theta', \\ z = \varphi' + \cos\theta \,.\, \psi'. \end{cases}$$

On a toujours

$$(2)\qquad T_2 = T + n \sum m(xy' - yx') + G,$$

les trois quantités qui constituent le deuxième membre de cette équation ayant les valeurs connues suivantes :

$$(3)\qquad \begin{cases} T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \\ \sum m(xy' - yx') = Ap\sin\varphi\sin\theta + Bq\cos\varphi\sin\theta + Cr\cos\theta, \\ G = \frac{1}{2}n^2[(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)\sin^2\theta + C\cos^2\theta]. \end{cases}$$

On conclut de là

$$(4)\quad T_2 = \frac{1}{2}[Ap(p + 2n\sin\varphi\sin\theta) + Bq(q + 2n\cos\varphi\sin\theta) + Cr(r + 2n\cos\theta)] + G,$$

d'où, en différentiant par rapport aux variables θ', φ', ψ' :

$$(5)\quad \begin{cases} \Theta = Ap\cos\varphi - Bq\sin\varphi + n(A - B)\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta, \\ \Phi = C(r + n\cos\theta), \\ \Psi = \Phi\cos\theta + \sin\theta(Ap\sin\varphi + Bq\cos\varphi) + n(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi)\sin^2\theta. \end{cases}$$

On tire de ces équations, résolues par rapport à p, q, r :

$$(6)\quad \begin{cases} Cr = \Phi - Cn\cos\theta, \\ Ap\sin\theta = \Theta\cos\varphi\sin\theta + (\Psi - \Phi\cos\theta)\sin\varphi - An\sin\varphi\sin^2\theta, \\ Bq\sin\theta = (\Psi - \Phi\cos\theta)\cos\varphi - \Theta\sin\varphi\sin\theta - Bn\cos\varphi\sin^2\theta. \end{cases}$$

Il faut maintenant substituer ces valeurs dans l'expression (3) de T, opération qui donne naissance à trois groupes de termes :

1° Ceux qui ne contiennent pas n; ils ont la même *forme* [*] que si le mouvement que j'étudie était un mouvement absolu : je représente leur somme par T';

2° Ceux qui contiennent en facteur la première puissance de n : ces termes se réduisent à $-n\Psi$;

3° Enfin ceux qui sont multipliés par n^2; et il est facile de reconnaître que ceux-ci constituent précisément la quantité G.

---

[*] Mais non la même *valeur*, car les lettres Φ, Θ, Ψ ne représentent pas les mêmes quantités dans le mouvement relatif et dans le mouvement absolu. Pour faire $n = 0$ dans les équations différentielles que nous allons trouver, il faudrait, d'une part, supprimer tous les termes qui sont multipliés par n ou par une puissance de n, et, d'autre part, changer la signification des lettres qui renferment n pour ainsi dire à l'état latent.

L'utilité de l'artifice que j'ai introduit dans cette théorie résulte précisément de ce que la signification des variables qui figurent dans un système d'équations différentielles est absolument sans influence sur les calculs relatifs à l'intégration de ces équations.

J'ai donc en définitive

$$(7) \qquad T = T' - n\Psi + G;$$

d'ailleurs, comme la pesanteur est détruite, on a $U + K = 0$, et partant $H = G - T$, donc

$$(8) \qquad H = n\Psi - T'.$$

26. Négligeons d'abord le terme $n\Psi$, c'est-à-dire prenons simplement $H = -T'$; nous aurons à intégrer un système d'équations différentielles dont la forme ne différera pas de celle des équations du mouvement absolu de rotation d'un corps quelconque, rapporté à des axes immobiles. Les intégrales de notre système d'équations auront donc aussi la même forme que celles des équations du mouvement absolu, puisqu'il n'y a pas à se préoccuper, dans l'intégration, de la signification des variables Θ, Φ, Ψ, laquelle n'est pas la même dans les deux cas.

Soient

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} (\alpha), & (\beta), \\ (\alpha_1), & (\beta_1), \\ (\alpha_2), & (\beta_2), \end{array} \right.$$

ces intégrales mises sous la forme *canonique* (n° **25**). On sait que si, à la fonction H qui caractérise un problème quelconque dont on possède les intégrales (9), on ajoute une fonction perturbatrice Ω, les équations différentielles du mouvement troublé sont

$$(10) \qquad \frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{d\Omega}{d\beta_i}, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{d\Omega}{d\alpha_i},$$

en supposant Ω exprimé en fonction des variables α_i et β_i, et du temps t.

Dans le problème actuel, comparé à celui qui résulte de la supposition $H = -T'$, on a

$$(11) \qquad \Omega = n\Psi;$$

mais comme les équations (6) sont indépendantes de l'angle ψ, il est

évident qu'il en sera de même de T et de T'; et que par suite une des intégrales du mouvement absolu devra être

$$\alpha_1 = \Psi'.$$

Donc l'expression (11) de Ω, transformée en fonction des quantités α_i et β_i et du temps, est simplement

$$\Omega = n\alpha_1; \tag{12}$$

et les équations différentielles (10) deviennent

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{d\alpha}{dt} = 0, & \dfrac{d\beta}{dt} = 0, \\ \dfrac{d\alpha_1}{dt} = 0, & \dfrac{d\beta_1}{dt} = n, \\ \dfrac{d\alpha_2}{dt} = 0, & \dfrac{d\beta_2}{dt} = 0. \end{array}\right. \tag{13}$$

Ces équations admettent pour intégrales

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha = \alpha', & \beta = \beta', \\ \alpha_1 = \alpha'_1, & \beta_1 = nt + \beta'_1, \\ \alpha_2 = \alpha'_2, & \beta_2 = \beta'_2; \end{array}\right. \tag{14}$$

c'est-à-dire qu'il suffit, pour avoir les intégrales du mouvement relatif, de retrancher nt du deuxième membre de l'intégrale (β_1), et de conserver les autres intégrales telles qu'elles sont.

§ IV. — *Mouvement d'un corps solide de révolution dont l'axe est assujetti à rester sur la surface d'un cône, fixe par rapport à la terre.*

27. Je place encore l'origine au centre de gravité du corps, lequel est toujours supposé fixe; je prends l'axe du cône directeur pour axe des z, le plan de cet axe et de la parallèle à l'axe du monde pour plan des zx; je dirige enfin l'axe des x suivant la projection de la partie nord de l'axe de la terre, et l'axe des y à gauche de Ox.

Ce nouveau système de coordonnées donne

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha = n\sin\omega, \\ \beta = 0, \\ \gamma = n\cos\omega; \end{cases}$$

$$(2)\quad T_2 = T + n\cos\omega \sum m(xy' - yx') + n\sin\omega \sum m(yz' - zy') + G,$$

ω étant l'angle de l'axe du cône directeur avec celui de la rotation de la terre.

Je commence par calculer les différentes quantités qui entrent dans la valeur de T_2, en introduisant les trois angles, θ, ψ, φ, définis comme au n° **17**. Remarquons seulement qu'ici θ est constamment égal au demi-angle au sommet du cône directeur, c'est-à-dire que $\theta' = 0$.

Cela posé, on a

$$(3)\quad \begin{cases} T = \frac{1}{2}[A\sin^2\theta.\psi'^2 + C(\varphi' + \cos\theta.\psi')^2], \\ \sum m(xy' - yx') = A\sin^2\theta.\psi' + C\cos\theta(\varphi' + \cos\theta.\psi'), \\ \sum m(yz' - zy') = -A\sin\theta\cos\theta\sin\psi.\psi' + C\sin\theta\sin\psi(\varphi' + \cos\theta.\psi'), \\ G = \frac{1}{2}n^2 A + \frac{1}{2}n^2(C - A)(\cos\omega\cos\theta + \sin\omega\sin\theta\sin\psi)^2; \end{cases}$$

expressions d'où l'on conclut

$$(4)\quad \begin{cases} T_2 = \frac{1}{2}[A\sin^2\theta.\psi'^2 + C(\varphi' + \cos\theta.\psi')^2] \\ \qquad + An\sin\theta(\cos\omega\sin\theta - \sin\omega\cos\theta\sin\psi)\psi' \\ \qquad + Cn(\cos\omega\cos\theta + \sin\omega\sin\theta\sin\psi)(\varphi' + \cos\theta.\psi') \\ \qquad + G; \end{cases}$$

et enfin

$$(5)\quad \begin{cases} \Phi = C(\varphi' + \cos\theta.\psi') + Cn(\cos\omega\cos\theta + \sin\omega\sin\theta\sin\psi), \\ \Psi = \Phi\cos\theta + A\sin^2\theta.\psi' + An\sin\theta(\cos\omega\sin\theta - \sin\omega\cos\theta\sin\psi). \end{cases}$$

Il faut maintenant, conformément à la marche que j'ai déjà suivie

bien des fois, tirer des équations (5) les valeurs de ψ' et de $\varphi' + \cos\theta.\psi'$, substituer ces valeurs dans l'expression (3) de T; et enfin, comme on a toujours $U + K = 0$, poser $H = G - T$. On obtient ainsi

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} H = &-\frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{C} - \frac{1}{2}\frac{(\Psi - \Phi\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} + n\Phi(\cos\omega\cos\theta + \sin\omega\sin\theta\sin\psi) \\ &+ n\frac{\Psi - \Phi\cos\theta}{\sin\theta}(\cos\omega\sin\theta - \sin\omega\cos\theta\sin\psi) + \frac{1}{2}n^2 A\sin^2\omega\cos^2\psi. \end{aligned}\right.$$

28. Je connais encore immédiatement deux intégrales du problème, savoir

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= H, \\ \alpha_1 &= \Phi; \end{aligned}\right.$$

la première est celle des forces vives, la deuxième résulte de ce que H ne contient pas l'angle φ.

Comme nous n'avons actuellement que deux variables indépendantes, φ et ψ, ces deux intégrales suffisent pour ramener l'intégration aux quadratures. De ces deux équations, la deuxième est toute résolue par rapport à Φ, et la première donne

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \Psi = &\Phi\cos\theta \pm \sin\theta\sqrt{\Phi^2(1-\mu) - 2AH + A^2n^2 - [\Phi - An(\cos\omega\cos\theta + \sin\omega\sin\theta\sin\psi)]^2} \\ &+ An\sin\theta(\cos\omega\sin\theta - \sin\omega\cos\theta\sin\psi) \end{aligned}\right.$$

Dans cette équation, tout comme dans celles du problème du § II, j'ai posé $\frac{A}{C} = \mu$, et j'ai mis partout H et Φ à la place de α et de α_1.

Il n'y a plus qu'à former la quantité

$$(9)\quad V = Ht + \Phi\varphi + \int \Psi\, d\psi,$$

ou, si l'on veut, à calculer directement, par des différentiations sous le signe somme, les deux dernières intégrales

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \beta &= -\frac{dV}{dH}, \\ \beta_1 &= -\frac{dV}{d\Phi}. \end{aligned}\right.$$

La première, qui donne l'angle ψ en fonction du temps, est

$$\beta + t = \pm A \sin\theta \int \frac{d\psi}{\sqrt{\Phi^2(1-\mu) - 2AH + A^2 n^2 - [\Phi - An(\cos\omega\cos\theta + \sin\omega\sin\theta\sin\psi)]^2}},$$

ou, en remplaçant ψ par l'angle $\chi = \psi - 90^\circ$ (n° **17**) que fait avec Ox la projection de l'axe de figure sur le plan xOy,

$$(11)\quad \beta + t = \pm A \sin\theta \int \frac{d\chi}{\sqrt{\Phi^2(1-\mu) - 2AH + A^2 n^2 - [\Phi - An(\cos\omega\cos\theta + \sin\omega\sin\theta\cos\chi)]^2}}.$$

29. Pour effectuer l'intégration, remarquons que la quantité

$$\Phi^2(1-\mu) - 2AH + A^2 n^2$$

est une constante positive; en effet, si l'on a égard à la valeur de H, on trouve

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Phi^2(1-\mu) - 2AH + A^2 n^2 \\ &= A^2 \sin^2\theta\, \chi'^2 + [\Phi - An(\cos\omega\cos\theta + \sin\omega\sin\theta\cos\chi)]^2, \end{aligned} \right.$$

ce qui démontre ce que j'ai avancé.

Ceci me permet de poser

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\Phi^2(1-\mu) - 2AH + A^2 n^2}{A^2 n^2 \sin^2\omega \sin^2\theta} = a^2, \\ &\frac{\Phi - An\cos\omega\cos\theta}{An\sin\omega\sin\theta} = b, \end{aligned} \right.$$

a et b étant deux constantes arbitraires, dont la première sera, si l'on veut, essentiellement positive. J'introduis dans les calculs subséquents ces nouvelles constantes, à la place des quantités Φ et H.

L'intégrale (11) devient alors

$$(14)\quad \beta + t = \pm \frac{1}{n\sin\omega} \int \frac{d\chi}{\sqrt{a^2 - (b - \cos\chi)^2}} = \pm \frac{1}{n\sin\omega} \int \frac{d\chi}{\sqrt{(p - \cos\chi)(q + \cos\chi)}},$$

en faisant

$$a + b = p, \quad a - b = q.$$

Posons enfin

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\chi = x,$$

il vient

$$(15)\qquad \beta + t = \pm\frac{2}{n\sin\omega}\int\frac{dx}{\sqrt{[p-1+(p+1)x^2][q+1+(q-1)x^2]}}.$$

La quadrature qui figure dans le deuxième membre de cette équation dépend des fonctions elliptiques de première espèce; on l'obtient sous la forme ordinaire en posant

$$(16)\qquad x = y\sqrt{\frac{1-p}{1+p}},\quad m^2 = \frac{(1-p)(1-q)}{(1+p)(1+q)};$$

en effet, on trouve ainsi

$$\beta + t = \pm\frac{2}{n\sin\omega\sqrt{-(1+p)(1+q)}}\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-m^2y^2)}},$$

d'où, en intégrant,

$$(17)\qquad y = \sin am\left[\frac{n\sin\omega\sqrt{-(1+p)(1+q)}}{2}(\beta+t),\ m\right],$$

la constante arbitraire β, jointe à t, permettant de supprimer le double signe $\pm$.

Je puis transformer l'équation (17) au moyen de la relation bien connue

$$\sin am(iu, m) = i\operatorname{tang} am(u, m'),$$

où, comme l'on sait,

$$i = \sqrt{-1},\quad m' = \sqrt{1-m^2}.$$

Si je pose

$$(18)\qquad n_1 = \frac{1}{2}n\sin\omega\sqrt{(1+p)(1+q)},$$

il vient

$$y = i\operatorname{tang} am[n_1(t+\beta), m'],$$

d'où

$$(19) \qquad x = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\chi = \sqrt{\frac{p-1}{p+1}} \operatorname{tang} am[n_1(t+\beta), m'].$$

30. Avant de discuter cette expression, c'est-à-dire de faire diverses hypothèses sur les signes et les grandeurs des quantités p et q, il faut commencer par examiner quelles sont celles de ces hypothèses qu'on devra rejeter. On verra par les remarques suivantes que les divers cas particuliers se réduisent à deux principaux : celui du mouvement continu et celui du mouvement oscillatoire.

1° Je dis d'abord que $1+p$ et $1+q$ ne peuvent ni l'un ni l'autre être négatifs.

Si l'on avait, en effet,

$$q < -1 \quad \text{ou} \quad a - b < -1,$$

on en conclurait

$$b > a + 1,$$

d'où

$$p > 2a + 1,$$

et à fortiori

$$p > 1,$$

puisque a est essentiellement positif.

Des deux inégalités

$$q < -1, \quad p > 1,$$

on déduirait

$$q + \cos\chi < 0, \quad p - \cos\chi > 0,$$

c'est-à-dire que le radical des expressions (14) serait essentiellement imaginaire.

On démontrerait de même que $1+p$ ne saurait être négatif.

On conclut de là que n_1 est toujours réel.

2° $p+1$ étant toujours positif, il doit en être de même de $p-1$, sans quoi la valeur (19) de x serait imaginaire, n_1 étant réel.

Il y a donc en définitive seulement deux cas à distinguer, selon que $1-q$ est positif ou négatif.

Premier cas : $1-q<0$. $1-p$ étant aussi négatif, la quantité m est réelle, et il est facile de s'assurer qu'elle est plus petite que 1, donc m' est également réel et plus petit que 1. On peut prendre m' pour module d'une fonction elliptique ordinaire; et si l'on pose

$$k_1 = m' = 2\sqrt{\frac{a}{(1+p)(1+q)}},$$

on aura

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}\chi = \sqrt{\frac{p-1}{p+1}}\,\text{tang}\,am(n_1 t, k_1), \tag{20}$$

en supposant que l'origine du temps coïncide avec l'instant où l'axe du solide considéré est dans le plan méridien.

On voit d'après la formule (20) que l'angle χ peut passer par toutes les valeurs comprises entre 0° et 360°. Le mouvement est continu. La durée d'une révolution dépend à la fois du coefficient n_1 et du module k_1. En désignant, avec Jacobi, par K_1 la fonction complète qui correspond au module k_1, on aura

$$T = \frac{4K_1}{n_1}.$$

Deuxième cas : $1-q>0$. m est imaginaire, et par conséquent m' plus grand que 1. Je pose alors

$$k_2 = \frac{1}{m'} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1+p)(1+q)}{a}},$$

et comme

$$\text{tang}\,am\left(u, \frac{1}{k}\right) = \frac{k}{k'}\cos coam\left(\frac{u}{k}, k\right) [*],$$

je puis remplacer la formule (20) par la suivante

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}\chi = \sqrt{\frac{1+q}{1-q}}\cos coam[n_2(t+\beta), k_2],$$

---

[*] *Fundamenta nova*, p. 70.

où

$$n_2 = \frac{n_1}{k_2} = n \sin\omega \sqrt{a}.$$

Enfin puisqu'on a d'une manière générale

$$\cos coam\, u = \cos am\,(K - u) = \cos am\,(u - K),$$

la constante arbitraire β me permet d'écrire l'équation précédente :

$$(21) \qquad \tang \frac{1}{2}\chi = \sqrt{\frac{1+q}{1-q}} \cos am\,(n_2 t, k_2).$$

Ici $\tang \frac{1}{2}\chi$ varie seulement de $+\sqrt{\frac{1+q}{1-q}}$ à $-\sqrt{\frac{1+q}{1-q}}$; c'est-à-dire que l'axe du solide accomplit des oscillations symétriques de part et d'autre du plan méridien, la durée de chaque oscillation complète étant

$$T = \frac{4K_2}{n_2}.$$

31. L'amplitude des oscillations est d'autant plus grande que q s'approche plus de l'unité, et d'autant plus petite que cette quantité est plus voisine de -1. Les deux cas limites, $q = 1$ et $q = -1$, correspondent à l'équilibre relatif; on a alors $\chi =$ constante : 0° dans le deuxième cas, et 180° dans le premier; on sait d'ailleurs qu'il y a stabilité dans l'une des positions et instabilité dans l'autre, et que la stabilité a lieu quand la rotation du corps autour de son axe de figure est de même sens que la rotation de la terre.

Si $1 + q$ est une quantité très-petite, le module k_2 est aussi très-petit, et l'on peut remplacer la fonction complète K_2 par $\frac{\pi}{2}$, ou, si l'on veut, par $\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k_2^2}{4}\right)$. En s'en tenant à la première valeur, on aura

$$(22) \qquad T = \frac{2\pi}{n_2} = \frac{2\pi}{n \sin\omega \sqrt{a}} = 2\pi \frac{\sqrt{\pm \frac{A \sin\theta}{n \sin\omega}}}{\sqrt[4]{\Phi^2(1-\mu) - 2AH + A^2 n^2}}.$$

Le double signe doit être pris sous le radical de manière à rendre celui-ci réel. En effet, j'ai dit (n° **29**) que je prenais pour a la valeur positive de $\sqrt{a^2}$, donc

$$a = \frac{\sqrt{\Phi^2(1-\mu) - 2AH + A^2 n^2}}{\pm A n \sin\omega \sin\theta},$$

en ayant soin de prendre le signe $+$ ou le signe $-$, selon que $A n \sin\omega \sin\theta$ ou $\frac{A \sin\theta}{n \sin\omega}$ est positif ou négatif.

Si dans l'équation (21) on fait $t = 0$, $1 + q$ étant toujours supposé très-petit, on a

$$\cos\chi_0 = -q = 1 \text{ à peu près},$$
$$\chi'_0 = 0;$$

si de plus je désigne par N_0 la projection de la rotation initiale du corps sur son axe de figure, j'ai

$$(5\ bis) \qquad \Phi = C[N_0 + n\cos(\omega - \theta)],$$

$$(13\ bis) \qquad a = \frac{N_0 + n(1-\mu)\cos(\omega-\theta)}{\mu n \sin\omega \sin\theta}.$$

Cette valeur de a a été obtenue en remplaçant le numérateur de l'expression (13) par sa valeur tirée de l'équation (12), et en y faisant ensuite $t = 0$.

Si l'on se reporte maintenant à l'équation (22), et qu'on substitue à la constante a sa valeur (13 *bis*), il vient

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} T &= 2\varpi \sqrt{\frac{\mu \sin\theta}{n \sin\omega\,[N_0 + n(1-\mu)\cos(\omega-\theta)]}} \\ &= 2\varpi \sqrt{\frac{\mu \sin\theta}{N_0 n \sin\omega}} \left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{n(1-\mu)\cos(\omega-\theta)}{N_0}\right], \end{aligned} \right.$$

en ayant égard à la petitesse habituelle du rapport $\frac{n}{N_0}$.

32. Pour terminer cette discussion, il faut encore considérer le cas où

$$p = q = 1,$$

ce qui exige qu'on ait

$$(24) \qquad b = 0 \quad \text{ou} \quad N_0 = n\,[\mu \cos\omega \cos\theta - \cos(\omega - \theta)].$$

L'équation précédente montre que ce cas ne se rencontrera généralement pas dans les expériences, car la rotation N_0 est toujours très-grande par rapport à n. Quoi qu'il en soit, on a alors

$$\beta + t = \pm \frac{1}{n \sin\omega} \int \frac{d\chi}{\sin\chi},$$

d'où

$$(25) \qquad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\chi = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\chi_0\, e^{\pm n \sin\omega . t},$$

$$(26) \qquad \chi' = \pm n \sin\omega \sin\chi.$$

Pour que ce cas se présente, il faut évidemment d'abord que l'équation (26) soit satisfaite à l'origine du mouvement; cette équation revient à $a = 1$, si l'on tient compte de ce que $b = 0$. Suivant que l'équation

$$\chi'_0 = \pm n \sin\omega \sin\chi_0$$

sera d'ailleurs vérifiée avec le signe + ou avec le signe —, on connaîtra le signe qu'on devra prendre dans les équations (25) et (26).

Dans ce cas remarquable, le mouvement ne sera pas périodique, l'axe du corps tendra indéfiniment vers sa position d'équilibre. Mais alors il est remarquable qu'il se dirigera indifféremment soit vers la ligne qui répond à $\chi = 0$, soit vers $\chi = 180^\circ$, selon le sens de l'impulsion primitive et quel que soit celui de sa rotation propre, pourvu, bien entendu, que celle-ci satisfasse à l'équation (24).

33. Enfin je n'aurais pas pu poser les équations (13), si $\sin\omega$ avait été nul, c'est-à-dire si l'axe de la terre coïncidait avec celui du cône directeur : on a alors

$$\psi = \pm M(t + \beta),$$

c'est-à-dire que la rotation de la terre n'a ici d'autre effet que de changer la valeur de la constante M, sans plus modifier les lois du mouvement; l'axe du corps solide conserve indéfiniment son état de repos ou de mouvement uniforme.

NOTE

Sur la surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace [*];

PAR M. DE LA GOURNERIE.

1° La surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'une droite est du quatrième ordre, et possède un parallèle double qui peut se changer en un cercle isolé et même devenir imaginaire.

Nous supposons la droite verticale, et nous prenons pour plans de projection le plan horizontal qui passe par le centre de la conique et un plan vertical perpendiculaire à celui de cette courbe, considérée dans l'une quelconque de ses positions.

Nous appelons Γ la projection horizontale de la conique génératrice, et cette courbe elle-même (Γ, Γ'). Nous désignons par les lettres I et O le centre de Γ et la trace horizontale de l'axe de révolution.

Concevons, dans le plan horizontal, d'abord une conique Δ homofocale de Γ et passant par les extrémités du diamètre qui, dans cette courbe, est conjugué aux cordes perpendiculaires au plan vertical, ensuite deux droites parallèles à la ligne de terre et tangentes à Δ : le parallèle double est l'intersection de deux nappes réelles de la surface, quand le point O n'est pas du même côté des droites que Δ; il se change en un parallèle de rebroussement, quand le point O est sur une des deux droites; il devient un cercle isolé, quand le point O est dans la partie du plan comprise entre les droites et Δ; il se réduit à

[*] Cette Note contient les principaux résultats d'un Mémoire qui paraîtra dans le prochain Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

un point isolé quand le point O est sur Δ; enfin, quand le point O est dans l'intérieur de Δ, le parallèle double est imaginaire.

2° La surface peut être engendrée par la révolution d'une conique identique à (Γ, Γ') et placée symétriquement à celle-ci par rapport à un plan méridien quelconque; elle admet, par conséquent, deux séries distinctes de coniques génératrices égales à (Γ, Γ').

Toute surface du second ordre qui contient le parallèle double et l'une des coniques de ces deux séries, renferme une conique de l'autre série et touche la surface de révolution aux deux points où ces courbes se rencontrent. Tout plan contenant une conique de l'une des séries coupe la surface suivant une conique de l'autre série et la touche en deux points (réels ou imaginaires).

3° Tout plan qui touche la surface en deux points la coupe suivant deux coniques superposables.

La surface admet trois systèmes de plans bitangents (réels ou imaginaires). A chaque système correspondent deux séries de coniques génératrices identiques. Il passe ainsi par chaque point de la surface six coniques, non compris le parallèle.

4° Nous avons dit que les coniques des deux séries du premier système sont égales à (Γ, Γ').

Les projections horizontales des coniques des autres systèmes sont égales aux deux coniques homofocales de Γ qui se croisent au point O. Nous appellerons Γ_1 celle qui est du même genre que Γ, et Γ_2 celle qui est de genre différent. Nous considérerons les coniques génératrices (Γ_1, Γ'_1) et (Γ_2, Γ'_2) dans la position où leurs plans sont perpendiculaires au plan vertical.

5° Le second système, c'est-à-dire celui auquel correspond la conique (Γ_1, Γ'_1), est toujours réel. L'axe de révolution passe à l'intérieur des coniques de l'un des deux premiers systèmes, et à l'extérieur des coniques de l'autre. Les coniques de ces deux systèmes se confondent quand la courbe donnée (Γ, Γ') rencontre l'axe.

6° La différence des carrés des rayons des cercles décrits par les centres I et I_1 des coniques Γ et Γ_1 est égale et de signe contraire à la différence des carrés des moitiés des axes homologues de ces coniques, et aussi à la différence des carrés des moitiés des diamètres perpendiculaires au plan vertical.

7° Dans les deux coniques Γ et Γ_1, les projections sur l'un des axes, du diamètre perpendiculaire au plan vertical, sont proportionnelles aux longueurs de cet axe.

Les tangentes des angles que les plans des coniques (Γ, Γ') et (Γ_1, Γ'_1) font avec le plan horizontal, sont en raison inverse des segments interceptés sur la ligne de terre par les tangentes des courbes Γ et Γ_1, aux sommets situés sur l'axe des foyers.

Les coniques (Γ, Γ') et (Γ_1, Γ'_1) ont une même distance focale : si l'une d'elles est un cercle, l'autre est également un cercle.

Ces diverses relations permettent de construire facilement la conique (Γ_1, Γ'_1), lorsque la conique (Γ, Γ') et le point O sont donnés.

8° Les coniques du troisième système ont leur projection horizontale égale à une courbe réelle (art. 4), mais une, au moins, des coordonnées de leur centre est imaginaire, et ces courbes sont imaginaires, excepté dans un cas que nous indiquerons plus loin (art. 10). Leurs plans sont réels quand le parallèle double est réel. En d'autres termes, les plans bitangents du troisième système ne coupent pas la surface; ils sont imaginaires quand le parallèle double est lui-même imaginaire.

Les coniques imaginaires du troisième système ont, avec les coniques réelles des deux premiers, les mêmes relations que celles-ci ont entre elles. Lorsque les plans du troisième système sont réels, on les détermine par une construction analogue à celle qui fait trouver les plans du deuxième

9° Si l'axe se transporte parallèlement à lui-même, de manière que sa trace O décrive une conique homofocale de Γ, et de même genre que Γ, la conique (Γ_1, Γ'_1) se déplace sans se modifier, et son plan conserve la même inclinaison. On obtient ainsi une infinité de surfaces de révolution qui peuvent être engendrées par deux mêmes coniques non superposables.

Quant le point O se meut sur une conique homofocale de Γ et de genre différent, les coniques imaginaires du troisième système restent les mêmes, et leurs plans réels ou imaginaires continuent à avoir la même inclinaison.

10° Lorsque le point O est sur un des axes de Γ, les plans de l'un des deux derniers systèmes sont verticaux. Pour reconnaître si ce sont

ceux du second système ou ceux du troisième, il faut voir si le segment de l'axe où se trouve le point O doit être considéré comme formant une homofocale de même genre que Γ ou de genre différent.

Quand le point O est à l'un des foyers de Γ, il se trouve à la limite de deux segments qui représentent des homofocales, l'une de même genre que Γ, l'autre de genre différent; les coniques des deux derniers systèmes se confondent alors. Les deux séries de chaque système se confondent également, et quatre des six coniques qui passent par un point de la surface sont ainsi réunies en une conique méridienne.

Les coniques du troisième système ne sont réelles que dans ce cas.

11° Les quatre normales (réelles ou imaginaires), abaissées du point O sur la conique Γ, sont égales aux quatre normales abaissées de ce même point sur la conique Γ_1.

[Quand on donne dans un plan une conique Γ et un point O non situé sur cette courbe, on peut toujours trouver une conique Γ_1 non superposable à Γ, et telle que les quatre normales abaissées du point O sur l'une de ces courbes soient égales aux quatre normales abaissées sur l'autre.]

12° Les tangences des plans des différents systèmes sont souvent idéales; ainsi, dans le tore ordinaire, les plans méridiens doivent être considérés comme bitangents, mais leurs points de contact sont imaginaires quand les cercles qu'ils contiennent ne rencontrent pas l'axe.

Si l'on cherche sur le plan horizontal le lieu des positions du point O pour lesquelles les deux points de contact des plans de l'un des systèmes sont réunis en un seul, positions qui correspondent à la limite des tangences idéales, on trouve une courbe du sixième ordre. Dans le cas où l'un des axes de la conique (Γ, Γ') décrit un plan, ce lieu est composé seulement de deux cercles; les tangences des plans sont réelles ou idéales, suivant que le point O est placé à l'intérieur ou à l'extérieur de ces cercles.

13° Le lieu des centres des surfaces du second ordre qui contiennent le parallèle double et qui touchent deux fois la surface, se compose de trois surfaces de révolution engendrées par des coniques tournant autour de l'axe de la surface considérée.

Dans le cas où l'un des axes de la conique (Γ, Γ') décrit un plan, le parallèle double est à l'infini, et les centres des surfaces du second

ordre contenant ce parallèle et bitangentes, forment deux hyperboloïdes à une nappe et un hyperboloïde à deux nappes qui peut se changer en un ellipsoïde imaginaire.

14° Toute surface de révolution du quatrième ordre ayant un parallèle double admet trois systèmes de coniques génératrices (réelles ou imaginaires).

15° Les géomètres n'ont point, à notre connaissance, étudié dans toute sa généralité la surface engendrée par la révolution d'une conique, mais MM. Yvon Villarceau, Moutard, Mannheim et J.-A. Serret ont fait connaître, dans des cas particuliers, divers théorèmes qui se rapportent aux théories dont nous venons de présenter le résumé (*Comptes rendus*, second semestre 1848; *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XVIII et XIX).

En faisant une transformation homologique, on peut étendre plusieurs des propriétés que nous avons obtenues à une surface plus générale encore que celle que nous avons considérée.

SUR

LA CONSTRUCTION DES ÉQUATIONS DU QUATRIÈME DEGRÉ

PAR

LES GÉOMÈTRES ARABES;

Par M. WOEPCKE.

On sait que les Grecs ont construit des problèmes du troisième degré par l'intersection de deux coniques. On trouve notamment plusieurs constructions de ce genre dans le commentaire d'Eutocius sur le *Traité de la Sphère et du Cylindre* d'Archimède.

La cinquième proposition du second livre de ce traité a pour objet la division d'une sphère par un plan tel, que les volumes des deux segments soient dans un rapport donné. Archimède démontre que ce problème dépend de la construction suivante : Étant donnés une ligne DZ et sur cette ligne deux points B, T, dont B soit situé entre D et T, déterminer un point X de la ligne DZ tel, que l'on ait

$$XZ : ZT = \overline{BD}^2 : DX^2.$$

Archimède promet de donner cette construction à la fin de sa proposition, mais elle ne s'y trouve pas. On peut voir dans l'édition d'Oxford des Œuvres d'Archimède, page 163, 2e colonne, lignes 33 à 61, le sentiment d'Eutocius au sujet de cette omission. Quelle qu'en soit d'ailleurs la cause, le problème fut résolu par plusieurs géomètres grecs, de diverses manières, mais toujours au moyen de l'intersection de deux sections coniques.

Le même problème fixa l'attention des géomètres arabes, aussitôt qu'ils se furent initiés aux spéculations supérieures des mathématiques grecques. Mais ils firent dès l'abord ce que les Grecs n'avaient jamais fait, c'est-à-dire qu'ils envisagèrent le problème sous sa forme algé-

brique. En effet, si l'on désigne dans le problème ci-dessus les segments BD, ZT, ZD, DX par a, b, c, x respectivement, la question énoncée s'exprime par l'équation

$$x^3 + a^2 b = cx^2.$$

Les géomètres arabes ne cherchèrent donc plus à construire une certaine division d'une ligne, mais ils tâchèrent de résoudre une équation du troisième degré. Ils ne tardèrent pas à s'occuper ensuite d'autres équations du troisième degré, différentes de celle que je viens de mentionner, et qui avait servi de point de départ à leurs recherches.

On ne saurait assez faire ressortir cette différence, ni assez insister sur l'importance de ce changement de point de vue. Car, grâce à cette nouvelle manière de traiter les problèmes, les Arabes, quoiqu'ils n'aient pas découvert la résolution algébrique des équations cubiques, purent parvenir à une construction *générale* et *systématique* de *toutes* les équations cubiques, et par là de *tous* les problèmes du troisième degré, conception à laquelle les géomètres grecs ne se sont jamais élevés.

Cette construction systématique des équations du troisième degré est due à Omar Alkhayyâmî, un des hommes les plus éminents parmi les contemporains du célèbre sultan seldjoukide Malic Châh, et qui mourut en 1123 de notre ère.

Il sera utile de faire suivre ici un court aperçu de la méthode d'Alkhayyâmî, parce que cet exposé servira à mettre sous leur vrai jour les observations que j'aurai à présenter plus loin sur la construction des équations du quatrième degré.

1° L'équation binôme

$$x^3 - a = 0$$

est construite par la combinaison des deux paraboles

$$y^2 - ax = 0, \qquad x^2 - y = 0.$$

Cette équation est traitée la première, non-seulement parce qu'elle est la plus simple, mais aussi parce que les solutions données pour quel-

ques-unes des équations suivantes dépendent, comme on verra, de celle de l'équation binôme.

2° Les équations où manque le terme en x^2

$$x^3 + \mu bx + \lambda a = 0$$

sont construites au moyen des deux sections coniques

$$y^2 + \mu x^2 + \lambda \frac{a}{b} x = 0, \qquad x^2 - \sqrt{b}.y = 0,$$

où μ et λ désignent des quantités qui ne peuvent prendre que les valeurs $+1$ ou -1. Mais il faut exclure le cas où μ et λ auraient simultanément la valeur $+1$, parce que les Arabes n'admettent pas l'existence de racines négatives, ni, à plus forte raison, de racines imaginaires. Ils n'ont donc pas à s'occuper des équations

$$x^3 + a = 0, \qquad x^3 + bx + a = 0,$$
$$x^3 + cx^2 + a = 0, \qquad x^3 + cx^2 + bx + a = 0,$$

où a, b, c désignent des quantités positives.

3° Parmi les équations privées du terme en x, les deux équations

$$x^3 \pm cx^2 \mp a = 0$$

sont construites au moyen de l'hyperbole et de la parabole

$$yx - \sqrt[3]{a^2} = 0, \qquad y^2 \mp \sqrt[3]{a}.x - \sqrt[3]{a}.c = 0.$$

On remarquera ici que la détermination du terme $\sqrt[3]{a^2}$ dans l'équation de l'hyperbole, et du cofficient $\sqrt[3]{a}$ dans celle de la parabole, dépend de l'équation

$$x^3 - a = 0.$$

Le troisième cas de l'équation où manque le terme en x, savoir :

$$x^3 - cx^2 - a = 0$$

est construit par la combinaison de l'hyperbole et de la parabole

$$yx - \sqrt{ac} = 0, \quad y^2 - cx + c^2 = 0.$$

4° Enfin pour l'équation complète

$$x^4 + \nu c x^2 + \mu b x + \lambda a = 0,$$

où ν, μ, λ signifient de nouveau $+1$ ou -1, l'hyperbole ou le cercle

$$y^2 + \mu x^2 + \left(\lambda \frac{a}{b} + \mu\nu c\right) x + \lambda\nu \frac{ac}{b} = 0$$

est combiné avec l'hyperbole

$$yx \pm \sqrt{b}\,.\,x \pm \lambda\mu \frac{a}{\sqrt{b}} = 0.$$

La combinaison de ces deux courbes donne

$$x^4 + \left(\lambda\mu \frac{a}{b} + \nu c\right) x^3 + \left(\lambda\mu\nu \frac{ac}{b} + \mu b\right) x^2 + \lambda 2 a x + \mu \frac{a^2}{b}$$
$$= (x^3 + \nu c x^2 + \mu b x + \lambda a)\left(x + \lambda\mu \frac{a}{b}\right) = 0.$$

Passons maintenant aux équations du quatrième degré.

J'ai découvert dans un manuscrit de la bibliothèque de Leyde [*] la construction d'une certaine équation du quatrième degré, due à un géomètre arabe, et je l'ai fait connaître, il y a plus de dix ans, dans les additions à mon édition de l'*Algèbre d'Alkhayyâmî*. L'analyse complète de ce morceau n'y occupe pas tout à fait une page. Peu étendue et placée au milieu de beaucoup d'autres données, cette notice a dû rester à peu près inaperçue, et je n'y reviendrais pas en ce moment, si, soumise à un nouvel examen plus approfondi, la construction dont il s'agit

---

[*] Je suis heureux de pouvoir, à cette occasion, offrir de nouveau mes plus vifs remercîments à MM. les conservateurs de la bibliothèque de Leyde, pour la bienveillante libéralité avec laquelle ils m'ont communiqué ce manuscrit.

ne m'avait semblé mériter une attention toute particulière. Elle m'a paru, en effet, contenir en germe une construction complète des équations du quatrième degré, et je tâcherai de justifier cette opinion par les considérations que l'on trouve ci-après.

Le géomètre arabe se propose de déterminer le quatrième côté d'un trapèze, dont la base et les côtés non parallèles sont égaux chacun à 10, l'aire devant être égale à 90. Prenant pour inconnue la demi-différence des deux côtés parallèles, il montre que le problème se ramène à l'équation du quatrième degré

$$(10 - x)^2 (10^2 - x^2) = 90^2 \quad \text{ou} \quad x^4 + 2000x = 20x^3 + 1900.$$

Pour construire cette équation, il combine l'hyperbole et le cercle

$$(10 - x)y = 90, \qquad 10^2 - x^2 = y^2.$$

Si nous faisons abstraction des valeurs particulières 10 et 90 [*], le géomètre arabe construit donc l'équation

$$x^4 - 2\alpha x^3 + 2\alpha^3 x - (\alpha^4 - \delta^2) = 0$$

par les deux courbes

$$(1) \qquad (\alpha - x)y = \delta,$$

$$(2) \qquad \alpha^2 - x^2 = y^2.$$

Or, je dis que, par une modification très-légère et qui se présente en quelque sorte d'elle-même, ces deux courbes pouvaient devenir, entre les mains des géomètres arabes, le moyen d'une construction générale de toutes les équations du quatrième degré.

En effet, remplaçons seulement dans l'équation (2) le premier

---

[*] Je fais observer que, dans les constructions d'Alkhayyâmî, les coefficients des équations proposées ne sont pas, comme on pourrait le croire, des nombres *déterminés*. L'auteur arabe leur laisse, au contraire, toute leur généralité. Le coefficient de x^2 s'appelle *le nombre des carrés*, le coefficient de x *le nombre des racines* ou *le nombre des côtés*, le terme constant *le nombre donné;* et l'on exécute sur ces *nombres*, que l'on ne détermine pas autrement, toutes les opérations que la construction comporte.

membre $\alpha^2 - x^2$, qui ne peut naturellement servir que pour le cas particulier du problème ci-dessus, par $\beta + \gamma x + x^2$. Ce sera certainement le moyen le plus facile à imaginer, et exigeant le moindre effort d'esprit possible, pour introduire les deux constantes dont on a besoin encore pour faire face aux quatre coefficients de l'équation du quatrième degré.

Combinant alors les deux courbes

$$(\alpha - x)y = \delta, \tag{3}$$

$$\beta + \gamma x + x^2 = y^2, \tag{4}$$

on obtient

$$x^4 + (-2\alpha + \gamma)x^3 + (\alpha^2 - 2\alpha\gamma + \beta)x^2 + (-2\alpha\beta + \alpha^2\gamma)x + \alpha^2\beta - \delta^2 = 0;$$

et comparant cette équation à l'équation

$$x^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \tag{1}$$

où d, c, b, a représentent maintenant des quantités positives ou négatives, on a, pour déterminer les coefficients des équations des deux courbes, les relations

$$\alpha^3 + \frac{3d}{4}\alpha^2 + \frac{c}{2}\alpha + \frac{b}{4} = 0, \tag{5}$$

$$\beta = c + 2d\alpha + 3\alpha^2, \tag{6}$$

$$\gamma = d + 2\alpha, \tag{7}$$

$$\delta^2 = \alpha^2\beta - a. \tag{8}$$

Le coefficient α est donné ici par une équation du troisième degré; mais nous venons de voir que les Arabes savaient construire ces équations. Ils pouvaient donc, pour la détermination de ce coefficient, recourir à une construction subsidiaire d'une équation du troisième degré, exactement comme nous l'avons vu ci-dessus dans la méthode d'Alkhayyâmî, à l'occasion de la construction des équations

$$x^3 \pm cx^2 \mp a = 0.$$

Lorsque b, c, d étaient tous les trois positifs, cette équation pouvait offrir une difficulté aux géomètres arabes, en ce sens qu'ils n'étaient pas habitués à considérer des équations de ce genre, comme je l'ai fait observer ci-dessus. Mais, dans ce cas, il suffisait de remplacer, dans le premier membre de l'équation (3), le signe $-$ par $+$, ce qui fait changer de signe, dans les équations (5) à (8), tous les termes affectés de puissances impaires de α. Une autre difficulté pouvait se présenter pour l'équation (8) lorsque le second membre devient négatif; mais on l'écarte tout aussi aisément en remplaçant, dans le second membre de l'équation (4), y^2 par $-y^2$, ce qui revient à changer le signe de δ^2 [*].

On se ferait une idée très-fausse de l'habileté des géomètres arabes, si l'on croyait que des considérations aussi faciles que celles qui précèdent aient pu échapper à leur sagacité. Si leurs raisonnements étaient exprimés dans un langage et conçus dans un esprit différents de ceux de la science moderne, ils n'en savaient pas moins trouver, pour arriver aux mêmes buts, des moyens identiques, au fond, à ceux que nous employons.

Je suis même loin de croire que, si les Arabes avaient réellement abordé le problème d'une construction *générale* des équations du quatrième degré, ils auraient adopté la marche que je viens d'indiquer.

---

[*] Comme les Arabes n'ont à construire que les racines positives, le seul cas où cette méthode pouvait, pour eux, être réellement en défaut, aurait lieu lorsque l'équation (I) aurait des racines positives, et qu'en même temps l'équation (5) n'en eût point. Or, si l'équation (I) a deux, trois ou quatre racines positives, l'équation (5), qui est la dérivée de l'équation (I), a respectivement au moins une, au moins deux ou trois racines positives. C'est donc seulement lorsque l'équation (I) n'a qu'une seule racine positive que la méthode *peut* être en défaut. Mais elle ne l'est pas nécessairement; car la courbe

$$y = x^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a,$$

tout en ne coupant l'axe des abscisses qu'une seule fois du côté des x positifs, peut avoir une, deux et même trois tangentes parallèles à cet axe, dont les points de contact ont des abscisses positives. On peut, du reste, facilement remédier à l'inconvénient que je viens de signaler, en augmentant les x d'une constante; mais il n'est pas probable que les Arabes eussent choisi ce moyen.

Je pense, au contraire, qu'ils auraient su trouver des méthodes beaucoup plus élégantes et plus ingénieuses. Le court exposé qu'on a vu ci-dessus de leur construction des équations du troisième degré est peut-être de nature à justifier cette opinion jusqu'à un certain point, quoiqu'il ne puisse pas montrer la facilité avec laquelle les Arabes maniaient les problèmes qui dépendent de l'intersection de deux coniques, ni l'élégance avec laquelle ils discutaient, par exemple, les questions des limites des solutions réelles [*].

En résumé, je ne dis donc pas que les Arabes ont construit toutes les équations du quatrième degré par la méthode ci-dessus esquissée; mais je dis qu'il est certain qu'ils en ont construit au moins une, et je considère comme très-probable que ce n'est pas là la seule construction de cette nature qu'ils aient faite. Je dis en outre, et je crois avoir prouvé, que les Arabes disposaient de tous les moyens nécessaires pour construire telle équation du quatrième degré qu'ils voulaient [**], du moment qu'ils désiraient s'occuper d'une question de ce genre.

Je ne puis pas m'empêcher de citer, en terminant, l'admirable solution du problème que Descartes a donnée dans le troisième livre de sa *Géométrie*. Après avoir fait disparaître le terme qui contient le cube de l'inconnue, il construit l'équation

$$y^4 = py^2 + qy + r,$$

en combinant la parabole

$$y^2 = x,$$

---

[*] On en peut voir des exemples p. 96 à 114 de l'édition ci-dessus citée de l'Algèbre d'Alkhayyâmî.

[**] A l'exception près que j'ai signalée moi-même, et qui correspond au cas tout particulier où, pour la courbe

$$y = x^4 + dx^3 + cx^2 + br + a,$$

les axes sont placés de telle façon, qu'une seule intersection de la courbe avec l'axe des abscisses est située d'un côté de l'axe des ordonnées, tandis que toutes les autres intersections, de même que tous les maxima et minima de l'ordonnée, sont situées de l'autre côté.

qui est entièrement indépendante des coefficients de la proposée, et qui peut, par conséquent, être construite une fois pour toutes, avec le cercle

$$y^2 + x^2 - qy - (1 + p)x - r = 0.$$

En faisant $r = 0$, on a la construction des équations du troisième degré.

Ce modèle de perfection marque bien le chemin qui restait encore à faire aux Arabes. Mais on ne saurait nier, sans être injuste envers ceux-ci, qu'ils avaient au moins commencé à marcher dans ce chemin. Il faut se rappeler aussi que dans chaque question scientifique les premiers pas et les derniers sont toujours les plus difficiles à faire.

Il ne sera peut-être pas sans intérêt de mettre à présent sous les yeux du lecteur une traduction textuelle du morceau qui a servi de base aux réflexions que l'on vient de lire. Ce morceau est anonyme, mais en jugeant d'après les autres pièces contenues dans le même manuscrit, je suis disposé à croire qu'il a été rédigé dans le courant du XIe siècle de notre ère.

« Au nom de Dieu clément et miséricordieux. C'est en Dieu que je » me confie.

» J'ai lu, ô mon frère (puisse Dieu conserver toujours votre salut), » ce que vous avez dit au sujet de la figure, relativement à la- » quelle les algébristes et les géomètres se sont mutuellement proposé, » depuis un certain temps, des questions, sans y trouver de réponse » complétement satisfaisante.

» Il s'agit de la figure ABCD, dont chacun des côtés AB, AD, BC est » dix, tandis que le côté CD est parallèle au côté AB, et dont l'aire est » de quatre-vingt-dix coudées. On désire connaître CD.

» Or, je dis qu'il existe beaucoup de lignes qui n'ont pas des noms » au moyen desquels elles puissent être désignées, comme on peut » désigner la droite qui est commensurable au nombre, et qui ne » sont ni des racines ni des médiales [*] de quantités rationnelles, ni » des binomiales, ni des apotomes, ni des racines de binomiales ou

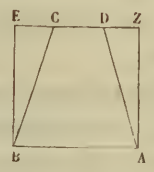
[*] C'est-à-dire racines carrées de racines carrées.

» d'apotomes, c'est-à-dire qu'elles n'appartiennent à aucune des vingt-
» sept espèces de lignes discutées par Euclide, dans le dixième livre de
» son ouvrage. Les lignes dont je veux parler ne sont pas non plus
» commensurables à certaines autres lignes que j'ai indiquées, telles
» que le côté de l'heptagone ou le côté de l'ennéagone, inscrits dans
» un cercle dont le diamètre est un nombre, car on appelle ces deux
» dernières lignes, de même que toutes les autres lignes semblables,
» d'après les figures dont ce sont les côtés, de même qu'on appelle
» la racine de dix d'après dix, et la racine de vingt d'après vingt, et
» l'on obtient de cette manière des noms suffisants pour désigner
» ces lignes. Toutes ces lignes existent et sont connues chez les bons
» géomètres, aussi bien que les lignes rationnelles commensurables
» aux nombres, car nous les rencontrons dans les constructions et
» dans les démonstrations, nous les présentons matériellement aux
» yeux, et nous opérons sur elles la duplation, la médiation, la
» composition, la séparation, la multiplication et la division, exac-
» tement comme nous effectuons ces opérations sur les lignes ration-
» nelles, grâce à la commensurabilité de celles-ci avec les nombres [*].

» Maintenant voici d'abord en quoi consiste la difficulté que la con-
» struction de la figure dont il s'agit offre aux algébristes.

» La méthode la plus expéditive que l'algébriste puisse employer
» dans ce problème consiste à élever aux deux points A, B, deux per-

Fig. 1.



» pendiculaires à AB, et à prolonger CD de part et d'autre jusqu'à ce

[*] Il paraît que le savant auquel cette lettre est adressée avait demandé quelle est la nature algébrique de la ligne CD qu'il s'agit de construire, et que le passage qui précède contient la réponse de l'auteur de la lettre. Ce passage me semble offrir un intérêt particulier, parce qu'il montre que les Arabes comprenaient parfaitement que les racines d'équations de degrés différents sont des quantités d'une nature essentiellement et fon-

» qu'il rencontre les deux perpendiculaires aux deux points E, Z, de sorte
» que AZ sera égal à BE et DZ égal à CE. Prenons DZ pour racine [*];
» son carré sera le carré (de l'inconnue). Retranchons-le du carré de
» AD, qui est cent; le reste, à savoir cent unités moins le carré (de
» l'inconnue), sera égal au carré de AZ. En même temps DC est égal
» à dix moins deux choses, et il est évident que le produit de sa moitié,
» plus la moitié de AB par AZ, est l'aire de la figure. La somme des
» deux moitiés est dix moins chose. Il faut donc que nous multipliions
» cela par lui-même et ensuite par cent moins le carré (de l'inconnue),
» afin que cela devienne égal au carré de l'aire de la figure. Si l'on
» multiplie dix moins chose par lui-même, il résulte un carré et cent
» unités moins vingt choses; et si l'on multiplie ceci par cent moins un
» carré, il vient vingt cubes et dix mille unités moins un carré-carré et
» moins deux mille racines égal au carré de quatre-vingt-dix, c'est-à-
» dire à huit mille et cent. Si l'on restaure (les quantités retranchées),
» et oppose (les quantités positives) les unes aux autres, il vient : un
» carré-carré et deux mille racines sont égaux à vingt cubes et mille
» neuf cents unités. L'équation a donc lieu entre quatre éléments qui
» ne sont pas les trois degrés proportionnels usuellement employés
» par les algébristes [**], et qui ne se laissent pas abaisser à des degrés
» inférieurs, de sorte que l'on puisse espérer d'en faire disparaître
» quelques-uns, parce que parmi ces (termes) se trouve le nombre;
» ils ne se laissent pas réduire comme on réduit la racine au nombre

---

damentalement différente. Il laisse entrevoir aussi que les Arabes savaient que la racine d'une équation du troisième degré, telle que le côté de l'ennéagone et de l'heptagone, ne peut pas s'exprimer par des quantités composées de radicaux du second degré, comme le sont les irrationnelles discutées par Euclide; car on voit clairement que l'auteur considère ces deux espèces de quantités comme des genres différents. J'ai analysé dans le tome XIX (1re série) du présent journal (p. 401 et suiv.) une démonstration de l'impossibilité d'exprimer la racine d'une équation du troisième degré au moyen des irrationnelles d'Euclide, démonstration due à Léonard de Pise, qui était le disciple des Arabes.

[*] C'est-à-dire pour inconnue. L'inconnue est appelée par les algébristes arabes « racine » ou « chose. »

[**] Ces trois degrés sont le carré de l'inconnue, l'inconnue et le terme constant.

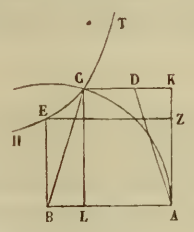
» et le carré à la racine, et le cube au carré; et en même temps ils ne » sont pas proportionnels. Car bien que le carré-carré soit au cube » comme la racine est au nombre, le cube n'est pas à la racine comme » le carré-carré est au cube. Mais si (les termes) ne sont pas propor- » tionnels, ils ne forment pas d'égalité, de sorte que la règle de l'algé- » briste ne s'y applique pas, et que son opération est en défaut.

» Quant au géomètre, ce problème lui présente des difficultés, s'il » ne connaît pas la manière de combiner les sections coniques, et s'il » n'est pas versé dans leur introduction et leur emploi dans les solu- » tions des problèmes.

» Sachez donc, ô mon frère (puisse Dieu conserver toujours votre » salut), que l'intention de celui qui a proposé cette question, re- » lativement à une figure qu'il avait conçue dans son imagination, » sans cependant pouvoir la construire, est de savoir comment il la » construira, et comment il la trouvera, et qu'il n'exige de celui à qui » il propose cette question rien autre chose si ce n'est de trouver la » figure, de sorte qu'il puisse la connaître de science certaine, et qu'il » puisse *de visu* examiner sa position et son tracé. Or, c'est ce que je » vais faire avec l'aide de Dieu.

» Menons donc la ligne AB qui soit égale à dix coudées, et élevons

Fig. 2.



» deux droites perpendiculaires à AB, à savoir AZ et BE, dont chacune » soit égale à neuf dixièmes de AB. Enfin menons EZ. Alors la figure » ABEZ sera un parallélogramme rectangle, et son aire sera de 90 cou- » dées. Construisons une hyperbole passant par le point E, et dont » les asymptotes soient les deux lignes AB, AZ. Que ce soit la section » conique TEH. Comme AB est plus grand que BE, le cercle décrit du » centre B avec un rayon égal à AB coupera la section conique TEH.

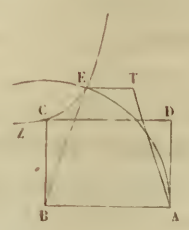
» Qu'il la coupe au point C. Joignons C, B par une ligne droite; elle
» sera égale à AB. Plaçons au point A, en prenant pour un des côtés AB,
» l'angle BAD égal à l'angle CBA. Faisons la ligne AD égale à la ligne BC,
» et menons CD. Je dis que l'aire de la figure ABCD est égale à 90 cou-
» dées, que chacun des côtés AB, AD, BC est 10, et que CD est pa-
» rallèle à AB.

» Démonstration. — Abaissons du point C sur AB la perpendicu-
» laire CL, et prolongeons AZ et CD du côté de Z et de D. Qu'ils se
» rencontrent au point K. Alors, puisque les deux angles A et B sont
» droits, et que les deux angles DAB, ABC sont égaux, les deux an-
» gles KAD, CBE sont égaux. En même temps, l'angle CBE est égal à
» l'angle BCL; par conséquent les deux angles KAD, BCL sont égaux,
» et les deux angles K, L sont droits, et le côté AD est égal au côté BC.
» Donc le triangle AKD est égal au triangle BCL. Ajoutant de part et
» d'autre la figure ADCL, nous aurons la surface ABCD égale à la sur-
» face AKCL. Mais puisque les deux droites CK, CL sont menées d'un
» point de l'hyperbole donnée à ses deux asymptotes AB, AZ parallè-
» lement à celles-ci, elles comprennent un rectangle égal à celui qui
» est compris sous ces dernières. Par conséquent, le rectangle ALCK
» est égal au rectangle ABEZ. Mais le rectangle ABEZ était égal à 90.
» Donc le rectangle ALCK est 90. Or on avait démontré que le rec-
» tangle ALCK était égal à la surface ABCD. Par conséquent, la surface
» ABCD est de 90 coudées. En même temps chacun des côtés AB, AD,
» BC est de 10 coudées, et le côté DC est parallèle à AB. Nous avons
» donc fait ce que nous nous étions proposé; nous avons montré
» l'existence de la ligne CD par construction et par démonstration, et
» nous l'avons tracée tant en indiquant la manière de le faire, qu'en la
» mettant matériellement sous les yeux. C'est ce que nous voulions
» démontrer.

» Ceci étant démontré, si l'on nous donne un parallélogramme rec-
» tangle oblong, nous pouvons mener des deux extrémités de son
» plus grand côté deux droites égales à ce côté sous des angles égaux
» et telles que si l'on joint leurs extrémités, il résulte une figure égale
» à la figure donnée, ayant trois côtés égaux chacun au plus grand côté
» de cette dernière, et le quatrième côté parallèle au côté qui lui est
» opposé. Car soit la figure donnée ABCD, et construisons une hyper-

» bole passant par le point C, et ayant pour asymptotes les deux lignes
» AB, AD. Que ce soit la section conique ECZ. Alors, si nous décrivons

Fig. 3.



» du centre B, avec un rayon égal à AB, un cercle, la section conique
» sera coupée, parce que AB est plus grand que BC. Que le cercle
» coupe l'hyperbole au point E. Joignons EB, et menons de A la droite
» AT sous un angle égal à l'angle ABE et égale à BE. Enfin joignons TE.
» Alors la surface ABET sera égale à la surface ABCD, chacun des deux
» côtés AT, BE sera égal à AB, et TE sera parallèle à AB. La démons-
» tration sera la même que celle dont l'exposé précède.

» Voilà la réponse qui s'est immédiatement présentée à nous pour
» la question dont il s'agit; et peut-être, si nous avions cherché avec
» un effort d'esprit plus grand et une sollicitude plus sincere, aurions-
» nous trouvé une solution plus expéditive et plus facile, que nous
» aurions offerte au frère dont Dieu fasse durer la prospérité, et qu'il
» veuille guider par la plus belle des directions. Dieu est celui qui
» inspire le choix des vrais moyens, et qui fait marcher dans les che-
» mins des réponses satisfaisantes. Louange à Dieu; que sa bénédiction
» soit sur son prophète Mohammed et sur les saints de sa famille. »

NOTE

Au sujet d'un article publié dans le Journal de Mathématiques, *tome VI, 2e série* [*];

Par M. E. DE JONQUIÈRES.

Dans cet article, qui traite plus particulièrement des propriétés des *séries de courbes d'ordre n et d'indice* N, j'ai donné une forme trop absolue aux énoncés de quelques théorèmes, et il est bon que le lecteur en soit averti.

Sauf le théorème I, qui est vrai dans toute sa généralité, la plupart des autres ne conviennent, sans restriction, qu'aux séries d'ordre n et d'indice 1, c'est-à-dire aux faisceaux de courbes d'ordre n et aux séries d'ordre 1 et d'indice N.

Si n et N sont à la fois quelconques, les nombres exprimés dans les énoncés des théorèmes ne doivent plus être pris comme des nombres absolus, mais simplement comme une limite supérieure.

Par exemple, le théorème II doit être énoncé ainsi :

« Parmi les courbes C_n d'une série d'indice N, il y en a, *au plus,* » $2(n-1)$ N qui touchent une droite donnée. »

Le théorème IX, qui avait été donné antérieurement dans le *Journal de Crelle,* t. LVI, prendra cet énoncé :

« Si des courbes du degré n doivent passer par $\frac{1}{2}n(n+3)-\mu$ points » et toucher μ courbes de degrés respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_\mu$, le nombre » des C_n qui satisfont à la question est, *au plus,*

$$m_1 m_2 \ldots m_\mu (m_1 + 2n - 3)(m_2 + 2n - 3)\ldots(m_\mu + 2n - 3). \text{ »}$$

S'il s'agit en particulier d'une conique tangente à cinq coniques données, le nombre des solutions est 7776, ainsi que l'indique la

[*] Cahier d'avril 1861, page 113.

formule; mais s'il s'agit d'une conique tangente à cinq droites, il n'y a qu'une solution, quoique la formule donne le nombre 32 pour limite supérieure.

Les théorèmes III, V, VI, VII, VIII, X doivent être soumis à une restriction du même genre.

Golfe du Mexique, 8 février 1863.

NOUVEAUX THÉORÈMES
CONCERNANT LES NOMBRES TRIANGULAIRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Nous avons vu (dans le cahier de novembre 1862) que tout entier n peut être exprimé non-seulement par la somme de trois nombres triangulaires, mais encore par la somme de deux nombres triangulaires plus le double d'un nombre triangulaire. Il va sans dire que zéro est compté parmi les nombres triangulaires. Ces nombres, dont l'expression générale est

$$\frac{x(x+1)}{2},$$

forment la suite

$$0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ldots;$$

désignons-les généralement par la lettre Δ affectée ou non d'accents, et les deux théorèmes que nous venons de rappeler pourront s'énoncer ainsi :

THÉORÈME I. — « Tout entier n est la somme de trois nombres » triangulaires : autrement dit, pour tout entier donné n, on peut » poser

$$n = \Delta + \Delta' + \Delta''. \text{ »}$$

THÉORÈME II. — « Tout entier n est la somme de deux nombres » triangulaires plus le double d'un nombre triangulaire : autrement » dit, pour tout entier donné n, on peut poser

$$n = \Delta + \Delta' + 2\Delta''. \text{ »}$$

Mais il y a d'autres théorèmes du même genre qu'il est bon d'ajouter à ceux-là. Par exemple, tout entier n est la somme de deux nombres triangulaires plus le quadruple d'un nombre triangulaire. En

d'autres termes, on a toujours, en nombres entiers,

$$n = \frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} + 4 \cdot \frac{z(z+1)}{2}.$$

En effet, Gauss a prouvé que le double d'un entier impair est toujours la somme de trois carrés. Nous avons donc en particulier le droit d'écrire

$$2(4n+3) = u^2 + v^2 + w^2.$$

Mais le premier membre est $\equiv 6 \pmod{8}$; il faut donc que des trois entiers u, v, w deux soient impairs et un impairement pair. De là

$$8n + 6 = (2x+1)^2 + (2y+1)^2 + 4(2z+1)^2.$$

Développez les carrés, retranchez 6 aux deux membres et divisez par 8 : il vous viendra

$$n = \frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} + 4 \cdot \frac{z(z+1)}{2},$$

ce qu'il fallait démontrer. Ainsi :

Théorème III. — « Tout entier n est la somme de deux nombres » triangulaires plus le quadruple d'un nombre triangulaire : autre- » ment dit, pour tout entier donné n, on peut poser

$$n = \Delta + \Delta' + 4\Delta''. \text{ »}$$

On démontre avec une égale facilité les deux théorèmes que voici :

Théorème IV. — « Tout entier n est formé d'un nombre triangu- » laire plus le double de la somme de deux nombres triangulaires : » autrement dit, pour tout entier donné n, on peut poser

$$n = \Delta + 2\Delta' + 2\Delta''. \text{ »}$$

Théorème V. — « Tout entier n est formé d'un nombre triangu- » laire plus le double d'un nombre triangulaire et le quadruple d'un » pareil nombre : autrement dit, pour tout entier donné n, on peut

» poser

$$n = \Delta + 2\Delta' + 4\Delta''. \text{ »}$$

Pour établir le théorème IV, on partira de l'équation, démontrée par Gauss,

$$8n + 5 = u^2 + v^2 + w^2,$$

et on remarquera que le premier membre étant $\equiv 5$ (mod. 8), il faut que des trois entiers u, v, w un soit impair et les deux autres pairs, savoir : un de ces deux derniers impairement pair, et l'autre pairement pair. De là

$$8n + 5 = (2x + 1)^2 + 4(2s + 1)^2 + 16t^2,$$

partant

$$8n + 5 = (2x + 1)^2 + 2[(2s + 1 + 2t)^2 + (2s + 1 - 2t)^2],$$

ou bien

$$8n + 5 = (2x + 1)^2 + 2(2y + 1)^2 + 2(2z + 1)^2.$$

Développez les carrés, retranchez 5 aux deux membres et divisez par 8 : il vous viendra enfin

$$n = \frac{x(x+1)}{2} + 2 \cdot \frac{y(y+1)}{2} + 2 \cdot \frac{z(z+1)}{2},$$

c'est-à-dire le théorème IV.

Pour établir le théorème V, on s'appuiera de nouveau sur Gauss, et on partira de l'équation

$$8n + 7 = u^2 + v^2 + 2w^2.$$

Le premier membre de cette équation étant $\equiv 7$ (mod. 8), il faut évidemment que w soit impair, et que des deux entiers u, v l'un soit impair, l'autre impairement pair. De là

$$8n + 7 = (2x + 1)^2 + 4(2z + 1)^2 + 2(2y + 1)^2,$$

ou bien, en intervertissant l'ordre des deux derniers termes,

$$8n + 7 = (2x + 1)^2 + 2(2y + 1)^2 + 4(2z + 1)^2.$$

Développez les carrés, retranchez 7 aux deux membres et divisez par 8 :

il vous viendra

$$n = \frac{x(x+1)}{2} + 2 \cdot \frac{y(y+1)}{2} + 4 \cdot \frac{z(z+1)}{2},$$

c'est-à-dire le théorème V.

Jusqu'ici nous n'avons fait que revêtir d'un nouvel énoncé des théorèmes connus, qui s'y prêtaient si bien, qu'après comme avant cette transformation ce sont toujours des théorèmes de Gauss. Nous allons maintenant donner deux théorèmes faciles encore à démontrer et dérivés au fond de la même source, mais qui pourtant, je crois, peuvent être présentés comme vraiment nouveaux.

Théorème VI. — « Tout entier n est la somme de deux nombres » triangulaires plus le quintuple d'un nombre triangulaire : autre- » ment dit, pour tout entier donné n, on peut poser

$$n = \Delta + \Delta' + 5\Delta''. \text{ »}$$

Voici quelques exemples :

$$\begin{array}{ll}
1 = 1 + 0 + 5.0, & 2 = 1 + 1 + 5.0, \\
3 = 3 + 0 + 5.0, & 4 = 3 + 1 + 5.0, \\
5 = 0 + 0 + 5.1, & 6 = 6 + 0 + 5.0, \\
7 = 1 + 6 + 5.0, & 8 = 3 + 0 + 5.1, \\
9 = 3 + 6 + 5.0, & 10 = 10 + 0 + 5.0, \\
11 = 6 + 0 + 5.1, & 12 = 6 + 1 + 5.1, \\
13 = 10 + 3 + 5.0, & 14 = 6 + 3 + 5.1, \\
15 = 10 + 0 + 5.1, & 16 = 10 + 6 + 5.0, \\
17 = 6 + 6 + 5.1, & 18 = 3 + 0 + 5.3, \\
19 = 3 + 1 + 5.3, & 20 = 10 + 10 + 5.0.
\end{array}$$

On n'a mis partout (et sans choix) qu'une seule décomposition de chaque entier, bien qu'il puisse le plus souvent y en avoir plusieurs. Par exemple, à l'équation

$$9 = 3 + 6 + 5.0,$$

que nous donnons, on pourrait ajouter celle-ci :

$$9 = 3 + 1 + 5.1;$$

mais une seule décomposition suffit pour l'exactitude du théorème.

Passons à la démonstration du théorème VI, et à cet effet rappelons d'abord que le produit

$$5(8n+7)$$

étant de la forme $8\mu+3$ peut être décomposé en une somme de trois carrés impairs, et qu'on peut même supposer la décomposition *propre*, c'est-à-dire telle, que les racines des trois carrés ne soient pas divisibles à la fois par un facteur >1, comme serait par exemple le facteur 5. C'est sur une décomposition propre que nous établirons notre raisonnement. Dans les démonstrations précédentes, on ne s'est pas occupé de la nature des décompositions prises pour point de départ : elle n'influait pas sur la marche du calcul ; il n'en est pas de même ici, et dès lors il est naturel d'opérer sur une décomposition propre, attendu que l'existence d'une décomposition de cette espèce est assurée, tandis que souvent il n'y a aucune décomposition impropre. Nous poserons donc

$$5(8n+7)=u^2+v^2+w^2,$$

u, v, w étant des entiers impairs qui ne soient pas, tous les trois, divisibles par 5. Mais u, v, w ne peuvent pas non plus être, tous les trois, premiers à 5, puisque l'on aurait alors

$$u^2\equiv\pm 1,\quad v^2\equiv\pm 1,\quad w^2\equiv\pm 1\quad (\text{mod. } 5),$$

ce qui ne permettrait pas à la somme

$$u^2+v^2+w^2$$

d'être $\equiv 0$ (mod. 5), comme elle doit l'être. Il est visible qu'un des entiers u, v, w doit être multiple de 5, et les deux autres premiers à 5.

Soit donc

$$w=5(2z+1);$$

il en résultera

$$5(8n+7)=u^2+v^2+25(2z+1)^2,$$

u et v étant premiers à 5.

Maintenant on voit que la somme u^2+v^2 est divisible par 5 : le

quotient sera, on le sait, une autre somme de deux carrés, et comme $u^2 + v^2$ était un entier impairement pair, il faudra que la somme nouvelle de deux carrés fasse de même un entier impairement pair, c'est-à-dire que les deux nouveaux carrés soient impairs. On est ainsi conduit (en divisant par 5) à l'équation

$$8n + 7 = (2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 + 5(2z + 1)^2.$$

Développez les carrés, retranchez 7 aux deux membres et divisez par 8 : vous en conclurez

$$n = \frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} + 5 \cdot \frac{z(z+1)}{2},$$

c'est-à-dire le théorème VI.

Théorème VII. — « Tout entier n est formé d'un nombre triangu-
» laire plus le double d'un nombre triangulaire et le triple d'un
» pareil nombre : autrement dit, pour tout entier donné n, on peut
» poser

$$n = \Delta + 2\Delta' + 3\Delta''. \text{ »}$$

Voici quelques exemples :

$1 = 1 + 2.0 + 3.0,$	$2 = 0 + 2.1 + 3.0,$
$3 = 3 + 2.0 + 3.0,$	$4 = 1 + 2.0 + 3.1,$
$5 = 3 + 2.1 + 3.0,$	$6 = 6 + 2.0 + 3.0,$
$7 = 1 + 2.3 + 3.0,$	$8 = 6 + 2.1 + 3.0,$
$9 = 0 + 2.0 + 3.3,$	$10 = 10 + 2.0 + 3.0,$
$11 = 0 + 2.1 + 3.3,$	$12 = 1 + 2.1 + 3.3,$
$13 = 10 + 2.0 + 3.1,$	$14 = 3 + 2.1 + 3.3,$
$15 = 15 + 2.0 + 3.0,$	$16 = 1 + 2.6 + 3.1,$
$17 = 15 + 2.1 + 3.0,$	$18 = 15 + 2.0 + 3.1,$
$19 = 10 + 2.0 + 3.3,$	$20 = 15 + 2.1 + 3.1.$

Cette fois encore on n'a indiqué pour chaque entier qu'une décomposition.

Passons à la démonstration du théorème VII, et à cet effet obser-

vons que le produit

$$3(4n+3)$$

étant de la forme $4\mu+1$ peut être représenté par une somme de trois carrés : il y a même des représentations propres, c'est-à-dire telles, que les racines des trois carrés ne soient pas divisibles à la fois par un même facteur >1, comme serait par exemple le facteur 3. Je pose donc

$$3(4n+3) = u^2 + v^2 + w^2,$$

les entiers u, v, w n'étant pas à la fois divisibles par 3, d'où l'on conclura sans peine qu'aucun d'eux ne peut l'être, vu qu'autrement la somme

$$u^2 + v^2 + w^2$$

ne pourrait pas être $\equiv 0$ (mod. 3), tandis qu'il faut qu'elle le soit. Le produit $3(4n+3)$ étant, d'un autre côté $\equiv 1$ (mod. 4), un des entiers u, v, w devra être impair et les deux autres pairs. Je supposerai donc désormais u impair, v et w pairs. Ceci convenu, je multiplie par 2 l'équation

$$3(4n+3) = u^2 + v^2 + w^2,$$

et j'en conclus

$$6(4n+3) = (u+v)^2 + (u-v)^2 + 2w^2.$$

Les entiers $u+v$ et $u-v$ sont impairs. De plus, u et v étant premiers à 3, on a

$$u \equiv \pm 1, \quad v \equiv \pm 1 \quad (\text{mod. } 3),$$

d'où il suit que des deux entiers $u+v$, $u-v$ un est divisible par 3 et l'autre non divisible par 3. Je représenterai par t celui qui est premier à 3 et par $3(2z+1)$ celui qui est divisible par 3. J'aurai donc

$$6(4n+3) = t^2 + 2w^2 + 9(2z+1)^2,$$

t et w étant premiers à 3. Maintenant on voit que l'entier impair

$$t^2 + 2w^2$$

est divisible par 3. Le quotient (impair aussi) sera à son tour formé d'un carré (impair) plus le double d'un carré. En conséquence j'écris

$$2(4n+3) = (2x+1)^2 + 2s^2 + 3(2z+1)^2.$$

Mais le premier membre étant $\equiv 2$ (mod. 4), il faut évidemment que l'entier s soit impair. Nous avons donc enfin

$$8n+6 = (2x+1)^2 + 2(2y+1)^2 + 3(2z+1)^2.$$

Développez les carrés, retranchez 6 aux deux membres et divisez par 8 : il vous viendra

$$n = \frac{x(x+1)}{2} + 2.\frac{y(y+1)}{2} + 3.\frac{z(z+1)}{2},$$

c'est-à-dire le théorème VII.

Ce qui me fait attacher quelque prix aux théorèmes VI et VII, c'est qu'ils complètent la série des théorèmes qu'on avait à trouver dans le sujet tout spécial qui nous occupe ici. Je veux dire que nous avons épuisé les expressions de la forme

$$a\Delta + b\Delta' + c\Delta'',$$

où a, b, c sont des entiers donnés, qui peuvent représenter *sans exception* tous les nombres 1, 2, 3, 4, etc.

Pour que l'expression

$$a\Delta + b\Delta' + c\Delta''$$

puisse représenter l'unité, il faut qu'un au moins des coefficients a, b, c soit égal à 1. Prenons donc $a = 1$, et dans l'expression qui reste,

$$\Delta + b\Delta' + c\Delta'',$$

supposons, comme cela est évidemment permis, $c \geqq b$. Il est clair qu'on ne pourra représenter le nombre 2, qui n'est pas triangulaire, que si l'on a $b = 1$ ou $b = 2$. De là deux expressions distinctes :

$$\Delta + \Delta' + c\Delta'', \qquad c = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$$

et

$$\Delta + 2\Delta' + c\Delta'', \qquad c = 2, 3, 4, 5, \ldots,$$

qu'il faut examiner séparément.

Pour la première expression

$$\Delta + \Delta' + c\Delta'',$$

on ne peut pas aller au delà de $c = 5$; car en prenant $c > 5$, on ne pourrait pas représenter le nombre 5, qui n'est ni triangulaire ni somme de deux triangulaires. La valeur $c = 3$ doit d'ailleurs être écartée; car l'expression

$$\Delta + \Delta' + 3\Delta''$$

ne peut pas représenter le nombre 8 par exemple, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer numériquement. Mais pour mieux mettre en évidence la cause générale qui rend la formule dont nous parlons impropre à notre objet, observons que l'équation

$$n = \Delta + \Delta' + 3\Delta''$$

entraînerait celle-ci

$$8n + 5 = i^2 + i'^2 + 3i''^2,$$

i, i', i'' étant des entiers impairs. Si n est quelconque, nous pouvons prendre comme cas particulier

$$8n + 5 = 3(8g + 7),$$

g restant à volonté. Il nous viendra ainsi

$$3(8g + 7) = i^2 + i'^2 + 3i''^2,$$

de sorte que $i^2 + i'^2$ sera divisible par 3, ce qui exige que séparément

$$i = 3j, \qquad i' = 3j',$$

et donne

$$8g + 7 = i''^2 + 3(j^2 + j'^2).$$

Si donc on prend g tel, que $8g + 7$ soit $\equiv 2$ (mod. 3), l'équation de-

viendra impossible. Cela arrive en prenant $g = 2$, d'où $8g + 7 = 23$, c'est-à-dire en faisant

$$8n + 5 = 3.23 = 69,$$

d'où $n = 8$, ce qui est la valeur indiquée plus haut; mais on voit qu'il y a une infinité d'autres valeurs de n non décomposables sous la forme $\Delta + \Delta' + 3\Delta''$.

Quant aux formules qui répondent à $c = 1, 2, 4, 5$, savoir :

$$\Delta + \Delta' + \Delta'',$$
$$\Delta + \Delta' + 2\Delta'',$$
$$\Delta + \Delta' + 4\Delta'',$$
$$\Delta + \Delta' + 5\Delta'',$$

elles répondent à nos théorèmes I, II, III, VI, et chacune de ces formules représente tous les nombres entiers, sans aucune exception.

J'arrive à la seconde expression générale

$$\Delta + 2\Delta' + c\Delta''.$$

On peut y prendre $c = 2, 3, 4$, d'où naissent les trois expressions

$$\Delta + 2\Delta' + 2\Delta'',$$
$$\Delta + 2\Delta' + 3\Delta'',$$
$$\Delta + 2\Delta' + 4\Delta'',$$

qui répondent respectivement à nos théorèmes IV, VII et V. Mais on ne peut pas y faire $c > 4$; car alors on ne représenterait pas le nombre 4 qui n'est pas exprimable par la formule binôme $\Delta + 2\Delta'$.

Les sept théorèmes que nous avons mentionnés plus haut sont donc les seuls qui existent dans le cercle limité où nous nous renfermons.

L'expression

$$a\Delta + b\Delta' + c\Delta''$$

a sur la forme

$$ax^2 + by^2 + cz^2$$

l'avantage de pouvoir, pour certains systèmes de valeurs des entiers

donnés a, b, c, représenter tous les nombres. De quelque manière qu'on la particularise, la forme

$$ax^2 + by^2 + cz^2$$

ne jouit jamais d'une telle propriété. En effet, pour que

$$ax^2 + by^2 + cz^2$$

représente l'unité, il faut qu'un des coefficients a, b, c soit égal à 1. Prenons donc $a = 1$, et supposons de plus, comme nous en avons le droit, $c \geqq b$, puis discutons la formule

$$x^2 + by^2 + cz^2,$$

qui se décompose en ces deux-ci

$$x^2 + y^2 + cz^2, \quad c = 1, 2, 3, 4, \ldots,$$
$$x^2 + 2y^2 + cz^2, \quad c = 2, 3, 4, \ldots,$$

attendu qu'on ne peut représenter 2 qu'en posant $b = 1$ ou $b = 2$. Dans la première, on ne peut pas aller au delà de $c = 3$, sans quoi on ne représenterait pas le nombre 3. On n'en tire donc que les trois expressions suivantes

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad x^2 + y^2 + 2z^2, \quad x^2 + y^2 + 3z^2,$$

lesquelles sont elles-mêmes à rejeter, car la première ne représente pas le nombre 7, la seconde le nombre 14, la troisième le nombre 6.

Quant à la formule

$$x^2 + 2y^2 + cz^2,$$

on ne peut pas y prendre $c > 5$, car alors on ne représenterait pas le nombre 5. Il ne reste donc à discuter que les valeurs $c = 2, 3, 4, 5$, d'où naissent quatre formules particulières :

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2,$$
$$x^2 + 2y^2 + 3z^2,$$
$$x^2 + 2y^2 + 4z^2,$$
$$x^2 + 2y^2 + 5z^2;$$

or aucune de ces formules particulières ne peut être admise : la première ne représente pas le nombre 7, la seconde le nombre 10, la troisième le nombre 14, la quatrième le nombre 10.

Ainsi la forme

$$ax^2 + by^2 + cz^2$$

ne convient jamais à notre objet, tandis que l'expression

$$a\Delta + b\Delta' + c\Delta''$$

donne quelques solutions.

Mais on pourrait aussi considérer des formules à trois termes, contenant à la fois des carrés et des nombres triangulaires, comme

$$a\square + b\Delta + c\Delta',$$
$$a\square + b\square' + c\Delta,$$

où $\square$ et $\square'$ représentent des carrés; et là on trouverait pareillement des expressions propres à représenter tous les nombres. Nous pourrons un jour traiter cette question nouvelle qui n'est pas sans intérêt et qui a ses difficultés.

THÉORÈMES

CONCERNANT

LE QUADRUPLE D'UN NOMBRE PREMIER DE L'UNE OU DE L'AUTRE DES DEUX FORMES $20k+3$, $20k+7$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

En considérant le nombre N des décompositions dont le quadruple d'un nombre premier $m \equiv 3 \pmod{4}$ est susceptible sous la forme

$$x^2 + p^{4l+1} y^2,$$

x et y désignant des entiers impairs et p un nombre premier $8g+3$ qui ne divise pas y, on prouve sans peine que ce nombre N est essentiellement pair. Mais quand m est de l'une des deux formes spéciales

$$20k+3, \quad 20k+7,$$

c'est-à-dire quand m est à la fois $\equiv 3 \pmod{4}$ et $\equiv \pm 3 \pmod{5}$, on peut aller plus loin et démontrer que N est la somme de deux entiers impairs N_1, N_2, en sorte qu'on est assuré d'avoir au moins $N = 2$. Cela résulte de deux théorèmes que nous allons énoncer et qui sont fondés sur la distinction des nombres premiers p de la forme $8g+3$ en deux classes suivant qu'ils sont ou non résidus quadratiques de 5; l'une de ces classes contiendra donc les nombres premiers p de l'une ou de l'autre des deux formes

$$40h+11, \quad 40h+19,$$

et c'est à elle que se rapportera l'entier impair N_1 : l'autre contiendra les nombres premiers p de l'une ou de l'autre des deux formes

$$40h+3, \quad 40h+27,$$

et c'est à elle que se rapportera l'entier impair N_2. Nos deux théorèmes s'appliquent en effet à ces deux classes de nombres premiers prises successivement.

Théorème I. — « Pour tout nombre premier m de l'une ou de » l'autre des deux formes $20k+3$, $20k+7$, on peut poser au moins » une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$4m = x^2 + p^{4l+1} y^2,$$

» x et y étant des entiers impairs et p un nombre premier $40h+11$ » ou $40h+19$, qui ne divise pas y. »

Théorème II. — « Pour tout nombre premier m de l'une ou de » l'autre des deux formes $20k+3$, $20k+7$, on peut poser au moins » une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$4m = x^2 + p^{4l+1} y^2,$$

» x et y étant des entiers impairs et p un nombre premier $40h+3$ » ou $40h+27$, qui ne divise pas y. »

On peut réunir ces deux énoncés en un seul en disant que : « Si du » quadruple $4m$ d'un nombre premier donné, de l'une des deux » formes $20k+3$, $20k+7$, on retranche tant que faire se peut les » carrés impairs

$$1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ 9^2,\ 11^2, \ldots,$$

» il y aura un nombre pair N de restes susceptibles d'être mis sous la » forme

$$p^{4l+1} y^2,$$

» p étant un nombre premier (naturellement de la forme $8g+3$) qui » ne divise pas y. Mais ce nombre pair N sera la somme de deux » nombres impairs N_1, N_2 respectivement relatifs aux deux cas de » $p \equiv 11$ ou 19 (mod. 40) et de $p \equiv 3$ ou 27 (mod. 40). »

Soit, comme premier exemple, $m = 3$, d'où $4m = 12$. On aura

$$12 - 1^2 = 11.1^2,$$
$$12 - 3^2 = 3.1^2,$$

d'où visiblement $N = 2$, $N_1 = 1$, $N_2 = 1$, conformément à ce que nous avons annoncé.

Prenons ensuite $m = 7$, d'où $4m = 28$. Il viendra d'abord

$$28 - 1^2 = 27 = 3^3.1^2,$$

ce qui ne fournit pas un reste canonique parce que l'exposant 3 n'est pas de la forme $4l + 1$; mais en continuant on a

$$\begin{aligned} 28 - 3^2 &= 19.1^2, \\ 28 - 5^2 &= 3.1^2, \end{aligned}$$

ce qui conduit encore à $N_1 = 1$, $N_2 = 1$.

Soit à présent $m = 23$, d'où $4m = 92$. Les restes seront

$$\begin{aligned} 92 - 1^2 &= 7.13, \\ 92 - 3^2 &= 83.1^2, \\ 92 - 5^2 &= 67.1^2, \\ 92 - 7^2 &= 43.1^2, \\ 92 - 9^2 &= 11.1^2. \end{aligned}$$

Il y a quatre restes canoniques, et le dernier seul appartient à la première classe des nombres p. On a, par suite, $N_1 = 1$, $N_2 = 3$, et cette fois encore notre théorème est confirmé.

Pour $m = 43$ (c'est-à-dire pour $4m = 172$) on a également $N_1 = 1$, $N_2 = 3$, les restes canoniques étant d'une part

$$172 - 1^2 = 19.3^2,$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} 172 - 3^2 &= 163.1^2, \\ 172 - 5^2 &= 3.7^2, \\ 172 - 13^2 &= 3.1^2; \end{aligned}$$

les restes non canoniques sont

$$\begin{aligned} 172 - 7^2 &= 3.41, \\ 172 - 9^2 &= 7.13, \\ 172 - 11^2 &= 3.17. \end{aligned}$$

Enfin pour $m = 47$ (ou $4m = 188$) on trouve $N_1 = 3$ et $N_2 = 3$. Après avoir écarté le reste non canonique

$$188 - 1^2 = 11.17,$$

on obtient en effet ces deux classes de restes

$$\begin{aligned} 188 - \ \ 3^2 &= 179.1^2, \\ 188 - \ \ 7^2 &= 139.1^2, \\ 188 - 13^2 &= \ \ 19.1^2, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} 188 - \ \ 5^2 &= 163.1^2, \\ 188 - \ \ 9^2 &= 107.1^2, \\ 188 - 11^2 &= \ \ 67.1^2. \end{aligned}$$

Je ne crois pas devoir pousser plus loin ces vérifications numériques.

SUR

LA QUADRATURE DES SURFACES DU 2e ORDRE DOUÉES DE CENTRE;

PAR O. SCHLÖMILCH,
Professeur à l'École Polytechnique de Dresde.

Nos notions sur la quadrature des surfaces du second ordre douées de centre se bornent encore au théorème établi par Legendre, que l'aire d'une portion d'une pareille surface terminée par quatre lignes de courbure peut être exprimée par des intégrales elliptiques. Mais, à l'exception du cas très-particulier où il s'agit de l'aire totale de l'ellipsoïde, cette expression est assez compliquée quand on y effectue toutes les réductions indiquées, circonstance qui est certainement la cause de ce qu'on n'ait encore trouvé dans la géométrie à trois dimensions aucun théorème analogue à celui de Fagnano [*]. D'après cela, il ne me semble pas superflu de montrer dans ce qui suit qu'on peut déterminer sur chacune des surfaces mentionnées une infinité de zones ou calottes dont les aires peuvent s'exprimer par des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce, et que, de plus, des zones et des calottes peuvent y être déterminées dont les aires ne diffèrent entre elles que par des quantités algébriques.

Que l'équation générale des trois surfaces du second ordre, douées de centre, soit

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1, \tag{1}$$

et que l'on ait pour les cas spéciaux

Ellipsoïde.....	$A = +\frac{1}{a^2}$,	$B = +\frac{1}{b^2}$,	$C = +\frac{1}{c^2}$,
Hyperboloïde à une nappe.....	$A = +\frac{1}{a^2}$,	$B = +\frac{1}{b^2}$,	$C = -\frac{1}{c^2}$,
Hyperboloïde à deux nappes...	$A = -\frac{1}{a^2}$,	$B = -\frac{1}{b^2}$,	$C = +\frac{1}{c^2}$.

[*] *Voyez* pourtant un article de M. Le Besgue *sur les arcs à différence rectifiable et les zones à différence planifiable* (cahier de septembre 1846, p. 331); *voyez* aussi une lettre du même auteur (p. 336). (J. L.)

Soit de plus, pour abréger,

$$(2) \qquad \alpha = \sqrt{1 - \frac{A}{C}}, \quad \beta = \sqrt{1 - \frac{B}{C}};$$

alors α et β désignent les excentricités des sections principales dans les plans de xz et de yz. Pour que α et β soient toujours réels et $\alpha > \beta$, il faut supposer dans l'ellipsoïde $a > b > c$, et dans les hyperboloïdes $a < b$. Qu'on imagine maintenant dans le plan de xy deux ellipses concentriques rapportées à leurs demi-axes respectifs a_0, b_0 et $a_1 > a_0$, $b_1 > b_0$. L'aire annulaire comprise entre ces deux ellipses peut être considérée comme la projection horizontale d'une zone d'une des surfaces en question. Soit Z l'aire de cette zone. On a alors

$$(3) \qquad \frac{1}{4} Z = \int\int \sqrt{\frac{1 - A\alpha^2 x^2 - B\beta^2 y^2}{1 - Ax^2 - By^2}}\, dx\, dy,$$

où les intégrations se rapportent à toutes les valeurs positives de x et y qui satisfont en même temps aux conditions

$$\left(\frac{x}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_0}\right)^2 \geqq 1, \quad \left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 \leqq 1.$$

En introduisant des coordonnées polaires au moyen des formules connues

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad dx\,dy = r\,d\theta\,dr,$$

et en posant, pour abréger,

$$P = A\cos^2\theta + B\sin^2\theta, \qquad Q = A\alpha^2\cos^2\theta + B\beta^2\sin^2\theta,$$

$$R_0 = \left(\frac{\cos\theta}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{b_0}\right)^2, \qquad R_1 = \left(\frac{\cos\theta}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{b_1}\right)^2,$$

la formule (3) se change en

$$Z = 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{R_1}}}^{\frac{1}{\sqrt{R_0}}} \sqrt{\frac{1 - Qr^2}{1 - Pr^2}}\, r\,d\theta\,dr.$$

La fonction qu'il s'agit d'intégrer par rapport à r devient rationnelle par la substitution de

$$\frac{1 - Pr^2}{1 - Qr^2} = u^2,$$

$$r^2 = \frac{1 - u^2}{P - Qu^2}, \quad rdr = -\frac{P - Q}{(P - Qu^2)^2}\,du;$$

on obtient

$$(4) \qquad Z = 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_{u_1}^{u_0} \frac{P - Q}{(P - Qu^2)^2}\,d\theta\,du,$$

les limites u_0 et u_1 étant

$$u_0 = \sqrt{\frac{R_0 - P}{R_0 - Q}}, \quad u_1 = \sqrt{\frac{R_1 - P}{R_1 - Q}}.$$

L'intégration par rapport à u pourrait s'effectuer sans peine, mais elle fournirait une expression assez compliquée renfermant ou des logarithmes ou des arcs de cercle. Si u_0 et u_1 étaient constants, on pourrait éluder cet inconvénient et simplifier considérablement le calcul en renversant l'ordre des intégrations, moyen qui ne réussit pas, tant que u_0 et u_1 sont fonctions de θ. Il faut donc opérer de manière à rendre constants u_0 et u_1. Or on a, d'après la signification de P, Q, R_0, R_1, α, β,

$$R_0 - P = \left(\frac{1}{a_0^2} - A\right)\cos^2\theta + \left(\frac{1}{b_0^2} - B\right)\sin^2\theta,$$

$$R_0 - Q = \left(\frac{1}{a_0^2} - A + \frac{A^2}{C}\right)\cos^2\theta + \left(\frac{1}{b_0^2} - B + \frac{B^2}{C}\right)\sin^2\theta;$$

la seconde de ces deux expressions devient divisible par la première, quand on a en même temps

$$A^2 = \left(\frac{1}{a_0^2} - A\right)H_0, \quad B^2 = \left(\frac{1}{b_0^2} - B\right)H_0,$$

H_0 désignant un facteur constant indéterminé. On peut remplir ces

conditions en posant

$$(5)\qquad a_0^2 = \frac{H_0}{A(A+H_0)},\quad b_0^2 = \frac{H_0}{B(B+H_0)},$$

ce qui donne

$$(6)\qquad u_0 = \sqrt{\frac{C}{C+H_0}}.$$

Semblablement u_1 acquerra une valeur constante, en posant

$$(7)\qquad a_1^2 = \frac{H_1}{A(A+H_1)},\quad b_0^2 = \frac{H_1}{B(B+H_1)},$$

savoir

$$(8)\qquad u_1 = \sqrt{\frac{C}{C+H_1}}.$$

Dans ces hypothèses, l'équation (4) se change en

$$Z = 4\int_{u_1}^{u_0}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{P-Q}{(P-Qu^2)^2}\,du\,d\theta,$$

et, en vertu des valeurs de P et Q, l'intégrale relative à θ est

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{A(1-\alpha^2)\cos^2\theta + B(1-\beta^2)\sin^2\theta}{[A(1-\alpha^2u^2)\cos^2\theta + B(1-\beta^2u^2)\sin^2\theta]^2}\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{AB}}\left(\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2u^2} + \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2u^2}\right)\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2u^2)(1-\beta^2u^2)}},$$

partant

$$(9)\qquad Z = \frac{\pi}{\sqrt{AB}}\int_{u_1}^{u_0}\left(\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2u^2} + \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2u^2}\right)\frac{du}{\sqrt{(1-\alpha^2u^2)(1-\beta^2u^2)}}.$$

Pour trouver le sens géométrique de ce résultat, j'observe qu'en donnant à H toujours le signe de C, l'équation

$$A^2x^2 + B^2y^2 - CHz^2 = 0$$

représente un cône à base elliptique, et que l'intersection de ce cône avec la surface représentée par l'équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

est une courbe à double courbure dont la projection horizontale est déterminée par l'équation

$$(10) \qquad A(A+H)x^2 + B(B+H)y^2 = H.$$

Quant aux valeurs de la quantité arbitraire H, on les peut toujours choisir tellement, que l'équation (10) représente une ellipse, dont les demi-axes sont réels, savoir

$$\sqrt{\frac{H}{A(A+H)}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{H}{B(B+H)}},$$

et comme ces valeurs s'accordent parfaitement avec celles qui sont indiquées aux n^{os} (5) et (7), on peut établir la proposition suivante :

« Les intersections de la surface représentée par l'équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

» par les deux cônes dont les équations sont

$$A^2x^2 + B^2y^2 - CH_0z^2 = 0,$$
$$A^2x^2 + B^2y^2 - CH_1z^2 = 0$$

» déterminent sur la première surface deux zones égales et symétri-
» quement opposées par rapport au plan de xy. L'aire de chacune
» de ces zones peut être exprimée, d'après la formule (9), par des in-
» tégrales elliptiques de première et de seconde espèce. »

La construction de ces deux cônes est d'ailleurs la même pour chacune des trois surfaces en question, car en substituant dans les équations de ces cônes les valeurs de A, B, C et en y posant

$$H_0 = \pm\frac{1}{h_0^2}, \quad H_1 = \pm\frac{1}{h_1^2},$$

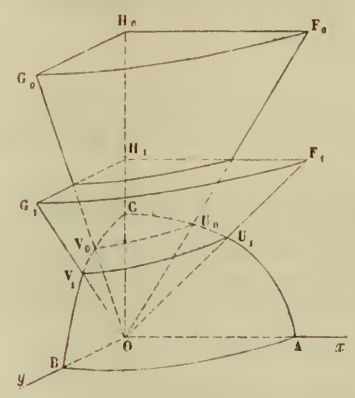
les signes supérieurs correspondants au cas où C est positif et les signes inférieurs à celui où C est négatif, on obtient toujours les mêmes équations, savoir

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} - \frac{z^2}{(ch_0)^2} = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} - \frac{z^2}{(ch_1)^2} = 0.$$

D'après cela, ces cônes peuvent être construits en portant $OH_0 = h_0$

Fig. 1.



et $OH_1 = h_1$ sur l'axe des z et en menant les longueurs

$$F_0H_0 = F_1H_1 = \frac{\overline{OA}^2}{OC} = \frac{a^2}{c},$$

$$G_0H_0 = G_1H_1 = \frac{\overline{OB}^2}{OC} = \frac{b^2}{c},$$

parallèles aux demi-axes a et b. Les ellipses F_0G_0 et F_1G_1 seront alors les bases de ces cônes. Dans le cas d'un ellipsoïde, les hauteurs h_0 et h_1 ne sont sujettes à aucune restriction; dans le cas d'un hyperboloïde à une nappe, il faut prendre $h_0 < a$ et $h_1 < a$; enfin, dans le cas d'un hyperboloïde à deux nappes, il faut prendre $h_0 > b$ et $h_1 > b$.

Pour réduire l'intégrale marquée (9) à des fonctions elliptiques,

nous posons

$$(11)\qquad \varkappa = \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{C-B}{C-A}}, \quad u = \frac{\sin\varphi}{\alpha}:$$

cela donne

$$\int\left(\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2 u^2} + \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2 u^2}\right)\frac{du}{\sqrt{(1-\alpha^2 u^2)(1-\beta^2 u^2)}}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int\left(\frac{1-\alpha^2}{\cos^2\varphi} + \frac{1-\beta^2}{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{1-\alpha^2}{\alpha(1-\varkappa^2)}\left[(1-\varkappa^2)F(\varphi) - E(\varphi) + \Delta(\varphi)\tang\varphi\right]$$

$$+ \frac{1-\beta^2}{\alpha(1-\varkappa^2)}\left[E(\varphi) - \frac{\varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}\right]$$

$$= \frac{1}{C\alpha}\left[(C-A)E(\varphi) + AF(\varphi) + \frac{A-(C-B)\cos^2\varphi}{\Delta(\varphi)}\tang\varphi\right].$$

En posant, pour abréger,

$$(12)\qquad G(\varphi) = \frac{A-(C-B)\cos^2\varphi}{\Delta(\varphi)}\tang\varphi,$$

et en déterminant les limites de φ au moyen des formules

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin\varphi_0 &= \alpha u_0 = \sqrt{\frac{C-A}{C+H_0}},\\ \sin\varphi_1 &= \alpha u_1 = \sqrt{\frac{C-A}{C+H_1}},\end{aligned}\right.$$

nous aurons la formule

$$(14)\qquad Z = \frac{\pi}{\sqrt{ABC(C-A)}}\left\{(C-A)[E(\varphi_0)-E(\varphi_1)] + A[F(\varphi_0)-F(\varphi_1)] + G(\varphi_0) - G(\varphi_1)\right\}$$

pour laquelle on peut écrire

$$(15)\qquad Z = \frac{\pi}{\sqrt{ABC(C-A)}}\left[(C-A)E(\tau) + AF(\tau) + G(\varphi_0) - G(\varphi_1) - \varkappa^2\sin\varphi_0\sin\varphi_1\sin\tau\right],$$

où l'amplitude τ est déterminée par la formule connue

$$(16)\qquad \sin\tau = \frac{\sin\varphi_0 \cos\varphi_1 \,\Delta(\varphi_1) - \sin\varphi_1 \cos\varphi_0 \,\Delta(\varphi_0)}{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi_0 \sin^2\varphi_1}.$$

Dans le cas d'un ellipsoïde, on peut donner à H_0 et H_1 les valeurs o ou ∞, ce qui conduit à des conséquences remarquables. Pour $H_0 = 0$ ou $h_0 = \infty$, la zone Z se change en une calotte dont la figure représente un quart (CU_1V_1). Soit Z_1 l'aire de cette calotte. La première des équations (13) donne dans cette hypothèse $\sin\varphi_0 = \alpha$ ou, en désignant par σ cette valeur particulière de φ_0,

$$(17)\qquad \sin\sigma = \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\varkappa},$$

et l'équation (13) devient

$$(18)\qquad Z_1 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \Big\{ (a^2 - c^2)[E(\sigma) - E(\varphi_1)] + c^2[F(\sigma) - F(\varphi_1)] + a^2 c^2 [G(\sigma) - G(\varphi_1)] \Big\}.$$

Dans l'hypothèse $H_1 = \infty$ ou $h_1 = 0$, la ligne d'intersection du cône, dont la hauteur est nulle, avec l'ellipsoïde, coïncide avec la trace horizontale AB. Alors la zone Z se change en une autre zone Z_0; la figure ABU_0V_0 en représente un quart, et les formules (13) et (14) donnent

$$(19)\qquad Z_0 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} [(a^2 - c^2) E(\varphi_0) + c^2 F(\varphi_0) + a^2 c^2 G(\varphi_0)].$$

Soit observé en passant qu'on peut déduire de cette expression la formule connue qui donne la moitié de l'aire de l'ellipsoïde en y supposant $h_0 = \infty$, partant $\varphi_0 = \sigma$.

La différence de Z_0 et Z_1 est

$$(20)\qquad Z_0 - Z_1 = \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \Big\{ (a^2 - c^2)[E(\varphi_0) + E(\varphi_1) - E(\sigma)] + c^2[F(\varphi_0) + F(\varphi_1) - F(\sigma)] + a^2 c^2 [G(\varphi_0) + G(\varphi_1) - G(\sigma)] \Big\},$$

et si l'on dispose sur h_0 et h_1 tellement que φ_0 et φ_1 satisfassent à la re-

lation

$$(21) \qquad \cos\sigma = \cos\varphi_0 \cos\varphi_1 - \sin\varphi_0 \sin\varphi_1 \Delta(\sigma),$$

on aura pour $Z_0 - Z_1$ la valeur algébrique

$$(22) \quad Z_0 - Z_1 \frac{\pi b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \left\{ (a^2 - c^2) x^2 \sin\varphi_0 \sin\varphi_1 \sin\sigma + a^2 c^2 [G(\varphi_0) + G(\varphi_1) - G(\sigma)] \right\}.$$

En vertu de ces équations et en y exprimant tout au moyen de a, b, c, h, h_0, h_1, on peut énoncer le théorème suivant :

« Quand les hauteurs h_0 et h_1 satisfont à l'équation

$$\frac{\sqrt{(a^2 + h_0^2)(a^2 + h_1^2)}}{a} - \frac{\sqrt{(c^2 + h_0^2)(c^2 + h_1^2)}}{c} = \frac{(a^2 - c^2) h_0 h_1}{abc},$$

» la différence entre les aires de la zone déterminée par le premier » cône et de la calotte déterminée par le second est une expression » algébrique, savoir

$$Z_0 - Z_1 = \pi \left[\frac{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2) h_0 h_1}{ab\sqrt{(c^2 + h_0^2)(c^2 + h_1^2)}} - c^2 + \frac{(b^2 c^2 + c^2 a^2 - a^2 b^2 + c^2 h_0^2) h_0}{\sqrt{(a^2 + h_0^2)(b^2 + h_0^2)(c^2 + h_0^2)}} + \frac{(b^2 c^2 + c^2 a^2 - a^2 b^2 + c^2 h_1^2) h_1}{\sqrt{(a^2 + h_1^2)(b^2 + h_1^2)(c^2 + h_1^2)}} \right].$$

Ces formules deviennent très-simples dans le cas $h_0 = h_1$, c'est-à-dire quand il n'y a qu'un seul cône qui divise la surface du demi-ellipsoïde en une calotte Z_1 et en une zone Z_0. Les deux équations précédentes se réduisent alors, la première à

$$h = \sqrt{\frac{abc}{a + b + c}}$$

et la seconde à

$$Z_1 - Z_0 = \pi \left(ab - \frac{(a^2 + b^2) c}{a + b} \right).$$

On pourrait établir des propositions semblables à l'égard des hyperboloïdes, mais elles ne seraient pas de nature à donner des résultats aussi simples dans les hypothèses particulières. En tout cas, on

peut regarder ces propositions comme analogues à celles de Fagnano sur l'ellipse et l'hyperbole.

La méthode dont nous avons fait usage pour la réduction de l'intégrale double au n° (3) s'applique aussi à l'intégrale multiple

$$\int\int\cdots x^{2m-1}y^{2n-1}\cdots f\left(\frac{1-Ax^2-By^2-\ldots}{1-A\alpha^2x^2-B\beta^2y^2-\ldots}\right)dx\,dy\ldots,$$

pourvu que les intégrations s'étendent à toutes les valeurs positives de x, y,..., qui satisfont aux deux conditions

$$\left(\frac{x}{a_0}\right)^2+\left(\frac{y}{b_0}\right)^2+\ldots\geqq 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{x}{a_1}\right)^2+\left(\frac{y}{b_1}\right)^2+\ldots\leqq 1.$$

Quant au résultat final, on le peut représenter sous la forme suivante. Supposons que l'intégrale proposée soit

$$S=\int\int\cdots\xi^{m-1}\eta^{n-1}\ldots f\left(\frac{1-\xi-\eta-\ldots}{1-\alpha\xi-\beta\eta-\ldots}\right)d\xi\,d\eta\ldots$$

et que les variables ξ, η,..., doivent satisfaire aux deux conditions

$$\frac{1-\lambda_0\alpha}{1-\lambda_0}\xi+\frac{1-\lambda_0\beta}{1-\lambda_0}\eta+\ldots\geqq 1,$$

$$\frac{1-\lambda_1\alpha}{1-\lambda_1}\xi+\frac{1-\lambda_1\beta}{1-\lambda_1}\eta+\ldots\leqq 1,$$

dans lesquelles λ_0 et λ_1 sont des quantités arbitraires entre 0 et 1; alors on a

$$S=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(1+m+n+\ldots)}\int_{\lambda_1}^{\lambda_0}\left(\frac{m(1-\alpha)}{1-\alpha t}+\frac{n(1-\beta)}{1-\beta t}+\ldots\right)\frac{(1-t)^{m+n+\ldots-1}\,dt}{(1-\alpha t)^m(1-\beta t)^n\ldots}.$$

En prenant $\lambda_0=1$, $\lambda_1=0$, on retombe sur une formule particulière donnée d'abord par M. Catalan.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE PAR M. SCHLÖMILCH.

« Dresde, 24 octobre 1862.

» ... Je profite de cette occasion pour vous communiquer quelques remarques relativement à deux points de la science.

» I. La résolution des équations du quatrième degré devient très-simple quand on se propose de réduire une telle équation à une équation réciproque. En effet, si dans l'équation donnée

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

on fait la substitution

$$x = g\xi + r,$$

on parvient à l'équation

$$\xi^4 + \alpha\xi^3 + \beta\xi^2 + \gamma\xi + \delta = 0,$$

et les valeurs de α, β, γ, δ seront

$$\alpha = \frac{4r + a}{g}, \quad \beta = \frac{6r^2 + 3ar + b}{g^2},$$

$$\gamma = \frac{4r^3 + 3ar^2 + 2br + c}{g^3}, \quad \delta = \frac{r^4 + ar^3 + br^2 + cr + d}{g^4}.$$

Pour que l'équation en ξ soit réciproque, il faut que l'on ait $\delta = 1$ et $\gamma = \alpha$, c'est-à-dire

$$g^4 = r^4 + ar^3 + br^2 + cr + d,$$
$$(4r + \alpha)g^2 = 4r^3 + 3ar^2 + 2br + c.$$

L'élimination de g entre ces deux équations donne

$$(4r + a)^2 (r^4 + ar^3 + br^2 + cr + d) = (4r^3 + 3ar^2 + 2br + c)^2,$$

ou bien

$$(a^3 - 4ab + 8c)r^3 + (a^2b + 2ac - 4b^2 + 16d)r^2$$
$$+ (a^2c + 8ad - 4bc)r + a^2d - c^2 = 0.$$

Cette équation détermine la valeur de r; les autres formules donnent successivement les valeurs de

$$g,\ \alpha,\ \beta,\ \xi \text{ et } x.$$

» Dans le cas spécial $a = 0$, l'équation en r devient plus simple

$$8cr^3 - 4(b^2 - 4d)r^2 - 4bcr - c^2 = 0,$$

et par substitution de $r = \frac{c}{2s}$ elle se change en celle-ci

$$s^3 + 2bs^2 + (b^2 - 4d)s - c^2 = 0,$$

ce qui est la résolvante d'Euler.

» La résolution donnée est peut-être moins élégante que celle d'Euler, mais elle repose sur une idée très-simple qui est facile à retenir dans la mémoire.

» II. On sait, d'après une remarque de Lambert, que la fonction

$$s = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \cdots,$$

étant développée suivant les puissances ascendantes de x, donne la série

$$s = x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \ldots,$$

où chaque coefficient contient autant d'unités que l'exposant a de diviseurs. La même fonction a été transformée par Clausen (*Journal de Crelle*, t. III, p. 95) qui trouve

$$s = \frac{1+x}{1-x}x + \frac{1+x^2}{1-x^2}x^4 + \frac{1+x^3}{1-x^3}x^9 + \ldots.$$

» Cette transformation est très-remarquable, et elle offre assez d'avantage pour le cas où x est une petite fraction, mais elle cesse d'être favorable dans le cas contraire où x diffère peu de l'unité. C'est pour le dernier cas que je vais indiquer une transformation convenable, savoir :

$$s = \frac{C - ll\left(\frac{1}{x}\right)}{l\left(\frac{1}{x}\right)} + \frac{1}{4} - C_1 l\left(\frac{1}{x}\right) - C_3\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^3 - \ldots,$$

les valeurs des coefficients étant

$$C = 0{,}5772156649\ldots,$$

$$C_1 = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2}{1.2.2} = \frac{1}{144},$$

$$C_3 = \frac{\left(\frac{1}{30}\right)^2}{1.2.3.4.4} = \frac{1}{86400},$$

$$C_5 = \frac{\left(\frac{1}{42}\right)^2}{1.2\ldots6.6} = \frac{1}{7620480},$$

. . . . . .

» La transformation indiquée se déduit aisément de la formule connue

$$f(z) + f(2z) + f(3z) + \ldots + f(mz)$$
$$= \frac{1}{z}\int_0^{mz} f(u)\,du + \frac{1}{2}[f(mz) - f(0)] + \frac{1}{12}[f'(mz) - f'(0)] - \ldots,$$

en y posant

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2},$$

$$m = \infty, \quad z = lx. \text{ »}$$

NOUVEAU THÉORÈME

CONCERNANT

LE QUADRUPLE D'UN NOMBRE PREMIER DE LA FORME $12k+5$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On pourra joindre ce théorème à ceux que nous avons donnés dans le cahier de mars 1861, page 93. Voici en quoi il consiste :

Soit m un nombre premier donné, de la forme $12k+5$. Je dis que son quadruple $4m$ vérifiera au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$4m = 3x^2 + p^{4l+1} y^2,$$

où x, y sont des entiers impairs et p un nombre premier non diviseur de y. Comme d'ordinaire, nous admettons pour l la valeur zéro.

Cet énoncé n'impose au nombre premier p aucune condition; mais par la nature même du nombre donné m, l'équation

$$4m = 3x^2 + p^{4l+1} y^2$$

entraîne les deux congruences

$$p \equiv 1 \pmod{8}, \qquad p \equiv 2 \pmod{3}.$$

Ainsi p ne peut être que de la forme $24g+17$.

On présentera notre théorème sous un point de vue plus commode en disant que si du quadruple $4m$ d'un nombre premier donné, de la forme $12k+5$, on retranche tant que faire se peut les entiers

$$3.1^2,\ 3.3^2,\ 3.5^2,\ 3.7^2, \ldots,$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la

forme

$$p^{4l+1} y^2,$$

p étant un nombre premier $(24g + 17)$ qui ne divise pas y.

Les nombres premiers de la forme $12k + 5$ forment la suite

$$5,\ 17,\ 29,\ 41,\ 53,\ 89,\ 101,\ 113,\ldots;$$

vérifions notre théorème sur quelques-uns de ces nombres.

Pour $m = 5$ (d'où $4m = 20$), on n'a qu'un seul reste

$$20 - 3.1^2 = 17.1^2;$$

mais ce reste a, comme il le faut, la forme canonique.

Pour $m = 17$ (d'où $4m = 68$), il vient d'abord

$$68 - 3.1^2 = 65 = 5.13,$$

ce qui ne fournit pas un reste canonique; mais le reste suivant

$$68 - 3.3^2 = 41.1^2$$

a la forme voulue, et le théorème subsiste.

Pour $m = 29$, $4m = 116$, les trois restes qu'on trouve sont canoniques :

$$\begin{aligned} 116 - 3.1^2 &= 113.1^2, \\ 116 - 3.3^2 &= 89.1^2, \\ 116 - 3.5^2 &= 41.1^2. \end{aligned}$$

Pour $m = 41$, $4m = 164$, on a aussi trois restes canoniques

$$\begin{aligned} 164 - 3.3^2 &= 137.1^2, \\ 164 - 3.5^2 &= 89.1^2, \\ 164 - 3.7^2 &= 17.1^2, \end{aligned}$$

plus un reste non canonique qui est

$$164 - 3.1^2 = 161 = 7.23.$$

Enfin on a également trois restes canoniques pour

$$m = 89$$

et pour

$$m = 101,$$

savoir, d'une part,

$$4.\ 89 - 3.1^2 = 353.1^2,$$
$$4.\ 89 - 3.5^2 = 281.1^2,$$
$$4.\ 89 - 3.9^2 = 113.1^2,$$

et, d'autre part,

$$4.101 - 3.1^2 = 401.1^2,$$
$$4.101 - 3.7^2 = 257.1^2,$$
$$4.101 - 3.11^2 = 41.1^2.$$

Je me dispense d'écrire les restes non canoniques et je ne pousserai pas plus loin ces calculs. On peut être assuré que toujours notre théorème serait vérifié.

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n, on demande une règle simple pour calculer à priori le nombre N, ou N (n), des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

c'est-à-dire le nombre N(n) des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

ou x, y, z, t désignent des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Comme les nombres premiers 2 et 3, quand ils divisent n, jouent un rôle tout spécial dans la formule qui détermine N(n), nous poserons

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant un entier impair, non divisible par 3, et les exposants α, β pouvant se réduire à zéro.

Eisenstein s'est occupé en 1847 (*Journal de Crelle*, t. XXXV, p. 134) du cas particulier de $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $n = m$, c'est-à-dire du cas particulier où l'on ne considère qu'un entier impair non divisible par 3. La règle qu'il indique sans démonstration pour trouver N (m) consiste à chercher l'excès de la somme des diviseurs de m compris dans la formule $12g \pm 1$ sur la somme des diviseurs de m compris dans la formule $12g \pm 5$: on en conclut la valeur de N(m) en multipliant l'excès dont il s'agit (et qui est tantôt positif, tantôt négatif) par les

facteurs numériques respectifs

$$6, \quad -12, \quad -2, \quad 4$$

suivant que m est de l'une des quatre formes linéaires

$$12k+1, \quad 12k+5, \quad 12k-5, \quad 12k-1,$$

dans lesquelles sont contenus tous les entiers impairs non divisibles par 3.

Décomposons m en deux facteurs d, δ de toutes les manières possibles, en sorte que $m = d\delta$. En employant une notation de Legendre, on a

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right) = 1$$

quand

$$d = 12g \pm 1,$$

tandis que

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right) = -1$$

quand

$$d = 12g \pm 5.$$

L'excès de la somme des diviseurs d compris dans la formule $12g \pm 1$ sur la somme des diviseurs d compris dans la formule $12g \pm 5$ s'exprime donc par la fonction numérique

$$\sum (-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right) d.$$

La règle d'Eisenstein revient dès lors aux quatre équations ci-après : pour $m = 12k+1$,

$$N(m) = 6\sum (-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right) d;$$

pour $m = 12k+5$,

$$N(m) = -12\sum (-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right) d;$$

pour $m = 12k - 5$,

$$N(m) = -2\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right)d;$$

enfin, pour $m = 12k - 1$,

$$N(m) = 4\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right)d.$$

On peut substituer à la fonction

$$\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right)d$$

une autre fonction numérique de même valeur absolue, mais qui a l'avantage d'exprimer toujours un nombre positif. Cette fonction nouvelle est

$$\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right)d.$$

On la trouve égale à

$$\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right)d$$

quand $m = 12k \pm 1$, vu qu'alors on a

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right) = (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right),$$

mais égale et de signe contraire quand $m = 12k \pm 5$, attendu que dans ce dernier cas

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{3}\right) = -(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right),$$

comme il est aisé de s'en assurer.

On peut donc poser, pour $m = 12k + 1$,

$$N(m) = 6\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right)d;$$

pour $m = 12k + 5$,

$$N(m) = 12 \sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d;$$

pour $m = 12k - 5$,

$$N(m) = 2 \sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d;$$

enfin, pour $m = 12k - 1$,

$$N(m) = 4 \sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d.$$

Mais je réunis ces quatre formules en une seule, en écrivant

$$N(m) = \left[3 - \left(\frac{m}{3}\right)\right] \left[2 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right] \sum,$$

où, pour abréger, je mets simplement $\sum$, au lieu de

$$\sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d.$$

2. La règle d'Eisenstein ne s'appliquant ni aux entiers impairs multiples de 3, ni aux entiers pairs premiers à 3, ni à fortiori aux entiers pairs et multiples de 3, nous avons dû non-seulement constater au moyen de nos *formules générales* l'exactitude de ses énoncés, mais aussi en chercher d'autres pour les cas qu'il a omis et qui ont leurs difficultés propres.

Qu'il s'agisse d'abord d'un entier n impair, mais multiple de 3, et soit

$$n = 3^\beta m,$$

l'entier m étant premier à 3. Continuons à désigner par la simple lettre $\sum$ la fonction numérique de m employée plus haut. Nous aurons

$$N(3^\beta m) = \left[3^{\beta+1} - (-1)^\beta \left(\frac{m}{3}\right)\right] \left[2 + (-1)^{\beta + \frac{m-1}{2}}\right] \sum.$$

Cette formule convient même au cas de $\beta = 0$: elle redonne alors la valeur de $N(m)$ inscrite à la fin du n° 1.

Pour $\beta = 1$, et en distinguant les quatre formes linéaires dont m est susceptible relativement au module 12, on a les équations spéciales que voici : quand $m = 12k + 1$,

$$N(3m) = 10 \sum;$$

quand $m = 12k + 5$,

$$N(3m) = 8 \sum;$$

quand $m = 12k - 5$,

$$N(3m) = 30 \sum;$$

enfin, quand $m = 12k - 1$,

$$N(3m) = 24 \sum.$$

Passons aux entiers n non divisibles par 3, mais pairs, de façon que

$$n = 2^\alpha m,$$

m étant impair et premier à 3. En conservant à $\sum$ sa signification, je trouve cette fois

$$N(2^\alpha m) = \left[3 - (-1)^\alpha \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha + \frac{m-1}{2}}\right] \sum.$$

En prenant $\alpha = 0$, on retrouverait la valeur déjà donnée de $N(m)$.

En prenant $\alpha = 1$, on a, pour $m = 12k + 1$,

$$N(2m) = 12 \sum;$$

pour $m = 12k + 5$,

$$N(2m) = 6 \sum;$$

pour $m = 12k - 5$,

$$N(2m) = 20 \sum;$$

pour $m = 12h - 1$,

$$N(2m) = 10 \sum.$$

Considérons enfin un entier quelconque n mis sous la forme

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant impair et premier à 3. Pour avoir

$$N(2^\alpha 3^\beta m),$$

on cherchera encore la fonction de m désignée par $\sum$, puis on la multipliera par le produit des deux facteurs

$$3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)$$

et

$$2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}$$

qui dépendent à la fois de m et des exposants α, β. En d'autres termes

$$N(2^\alpha 3^\beta m) = \left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum.$$

Cette formule remarquable est absolument générale et l'on peut y attribuer aux exposants α, β toutes les valeurs possibles, même la valeur zéro.

3. On voit que la fonction numérique de m marquée par la lettre

$$\sum$$

et définie, au moyen des facteurs conjugués d, δ de m, par la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right) d,$$

joue dans la valeur de

$$N(2^\alpha 3^\beta m)$$

le rôle le plus considérable, quoique d'autres éléments y aient aussi de l'influence.

En donnant avec Jacobi une extension utile au symbole de Legendre qui figure dans nos formules, on peut écrire

$$(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right)=\left(\frac{3}{\delta}\right),$$

et la fonction $\sum$ devient

$$\sum\left(\frac{3}{\delta}\right)d.$$

Cette forme est celle qu'on doit préférer pour mettre en évidence certaines analogies; mais dans l'usage ordinaire elle est moins commode.

La somme $\sum$ peut s'exprimer par un produit. Il est aisé de s'assurer en effet que si a, b,... désignent les facteurs premiers distincts de m, en sorte que

$$m=a^{\mu}b^{\nu}\ldots,$$

la valeur de $\sum$ sera celle du produit des facteurs ci-après

$$a^{\mu}+(-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)a^{\mu-1}+a^{\mu-2}+(-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)a^{\mu-3}+\ldots,$$

$$b^{\nu}+(-1)^{\frac{b-1}{2}}\left(\frac{b}{3}\right)b^{\nu-1}+b^{\nu-2}+(-1)^{\frac{b-1}{2}}\left(\frac{b}{3}\right)b^{\nu-3}+\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou, ce qui revient au même, des facteurs

$$a^{\mu}+\left(\frac{3}{a}\right)a^{\mu-1}+a^{\mu-2}+\left(\frac{3}{a}\right)a^{\mu-3}+\ldots,$$

$$b^{\nu}+\left(\frac{3}{b}\right)b^{\nu-1}+b^{\nu-2}+\left(\frac{3}{b}\right)b^{\nu-3}+\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots:$$

on voit par là que la valeur de $\sum$ est essentiellement >0. Pour

$m = 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25$, etc., les valeurs respectives de $\sum$ sont $1, 4, 6, 12, 14, 16, 18, 24, 21$, etc.

4. La formule générale donnée pour

$$N(2^\alpha 3^\beta m)$$

résout complétement la question que nous nous étions proposée. Mais nous ajouterons une remarque utile en décomposant la valeur totale de

$$N(2^\alpha 3^\beta m)$$

en deux parties séparées

$$N'(2^\alpha 3^\beta m), \quad N''(2^\alpha 3^\beta m),$$

dont elle sera la somme, et qui exprimeront les nombres de solutions de l'équation indéterminée

$$2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

pour les deux cas distincts de $z^2 + 3t^2$ entier impair et de $z^2 + 3t^2$ entier pair.

On a en effet pour $z^2 + 3t^2$ impair

$$N'(2^\alpha 3^\beta m) = 2^\alpha \left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum$$

et pour $z^2 + 3t^2$ pair

$$N''(2^\alpha 3^\beta m) = \left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^\alpha + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right] \sum,$$

formules desquelles résultent de nombreuses conséquences.

Je supprime, pour le moment, d'autres remarques d'une importance égale, qui pourront trouver leur place ailleurs.

5. Nous avons déterminé le nombre total

$$N(2^\alpha 3^\beta m)$$

des solutions tant propres qu'impropres de l'équation

$$2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

savoir

$$\mathrm{N}(2^\alpha 3^\beta m) = \left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\left[2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\right]\sum.$$

Mais on peut demander à part le nombre

$$\mathrm{M}(2^\alpha 3^\beta m)$$

des solutions propres, c'est-à-dire des solutions pour lesquelles aucun facteur > 1 ne divise à la fois x, y, z, t. Pour cela, considérons l'entier m décomposé en facteurs premiers sous la forme

$$m = a^\mu b^\nu \ldots,$$

puis formons le produit

$$\prod\left[a^\mu + (-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)a^{\mu-1}\right]$$

dont les facteurs successifs sont

$$a^\mu + (-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)a^{\mu-1}, \quad b^\nu + (-1)^{\frac{b-1}{2}} b^{\nu-1}, \ldots,$$

et que je désignerai par la simple lettre

$$\Pi.$$

On passera de la valeur de $\mathrm{N}(2^\alpha 3^\beta m)$ à celle de $\mathrm{M}(2^\alpha 3^\beta m)$ en remplaçant d'abord $\sum$ par $\prod$, mais de plus, si β est > 1, en remplaçant le facteur

$$3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)$$

par

$$8.3^{\beta-1},$$

et, si α est > 1, le facteur

$$2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}$$

par

$$3.2^{\alpha-1}.$$

Cette règle s'accorde avec celle qu'Eisenstein a donnée pour le cas particulier de $\alpha = 0$, $\beta = 0$, le seul dont il se soit occupé : il suffit alors de changer $\sum$ en $\prod$.

Je remarquerai en terminant que si l'on représente le produit $\prod$ par $P(m)$ et la somme $\sum$ par $Q(m)$, on aura

$$Q(m) = P\left(\frac{m}{1^2}\right) + \ldots + P\left(\frac{m}{D^2}\right) + \ldots,$$

D représentant les diviseurs de m dont le carré D^2 divise aussi m, ce qui arrive toujours pour $D = 1$ par exemple.

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2;$$

Par M. J. LIOUVILLE.

1. On demande une formule simple pour calculer à priori le nombre des représentations d'un entier donné quelconque n par la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2,$$

c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Comme la formule désirée dépend de la manière dont les nombres premiers 2 et 3 entrent dans la composition de n, nous ferons

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant un entier impair non divisible par 3, et les exposants α, β pouvant se réduire à zéro. C'est donc du nombre des solutions de l'équation

$$2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2$$

qu'il s'agira désormais. En employant une notation de Jacobi [*], qui est souvent commode, nous désignerons ce nombre par

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2\right);$$

puis rappelant ce que nous avons dit (dans l'article précédent) au su-

[*] *Journal de Crelle*, t. XII, p. 167 : *De compositione numerorum è quatuor quadratis.*

jet du nombre

$$N''(2^\alpha 3^\beta m)$$

des solutions que l'équation

$$2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

comporte quand on exige que $z^2 + 3t^2$ soit un entier pair, nous donnerons en deux mots la solution du problème qui nous occupe à présent : il nous suffira effectivement de poser l'équation

$$N(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2) = N''(2^{\alpha+1} 3^\beta m).$$

On a vu que

$$N''(2^\alpha 3^\beta m) = \left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^\alpha + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum,$$

où la simple lettre

$$\sum$$

désigne la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right) d$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$. En changeant α en $\alpha + 1$, on aura donc pour

$$N''(2^{\alpha+1} 3^\beta m)$$

cette valeur

$$\left[3^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+1} - (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum,$$

qui sera aussi la valeur de

$$N(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2).$$

2. Si l'on se borne à considérer (comme Eisenstein l'a fait en 1847,

dans le *Journal de Crelle*, t. XXXV, p. 134) des entiers impairs non divisibles par 3, c'est-à-dire si l'on se borne au cas très-particulier de $\alpha = 0$, $\beta = 0$, on trouvera pour

$$N(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2)$$

la valeur suivante

$$\left[3 + \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2 - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\sum;$$

de sorte que si l'on considère successivement les nombres m compris dans les quatre formules linéaires qui peuvent leur convenir par rapport au module 12, il viendra pour la valeur demandée, d'abord

$$4\sum$$

si $m = 12k + 1$, puis

$$2\sum$$

si $m = 12k + 5$, mais

$$12\sum$$

si $m = 12k - 5$, enfin

$$6\sum$$

si $m = 12k - 1$; ce qui s'accorde avec les énoncés d'Eisenstein.

Nous ne croyons pas utile d'ajouter ici d'autres cas spéciaux : l'important est d'avoir donné la formule générale et surtout d'avoir bien mis en évidence par l'introduction de la fonction numérique

$$N''(2^\alpha 3^\beta m)$$

le lien intime qui unit la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2$$

à la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2.$$

Au reste

$$z^2 + 3t^2$$

et

$$2z^2 + 2zt + 2t^2$$

sont les deux formes quadratiques binaires (l'une proprement primitive, l'autre improprement primitive) qui appartiennent au déterminant -3; et c'est de là que naît, on le conçoit, la liaison que nous indiquons entre nos deux formes quaternaires.

3. Eisenstein a aussi donné (pour les entiers m impairs et non divisibles par 3) l'expression du nombre des représentations propres, par la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2,$$

c'est-à-dire qu'il a donné l'expression du nombre des solutions que l'équation

$$m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2$$

comporte quand on exclut les valeurs de x, y, z, t qui seraient divisibles par un facteur commun > 1. Alors, au lieu de la somme $\sum$, il introduit le produit

$$\Pi = \left[a^\mu + (-1)^{\frac{a-1}{2}} \left(\frac{a}{3}\right) a^{\mu-1}\right]\left[b^\nu + (-1)^{\frac{b-1}{2}} \left(\frac{b}{3}\right) b^{\nu-1}\right]\ldots,$$

déjà considéré dans l'article précédent, et qui se forme au moyen des facteurs premiers $a, b, \ldots$ de l'entier $m = a^\mu b^\nu \ldots$; il laisse d'ailleurs subsister pour les quatre valeurs de m (mod. 12) les coefficients numériques 4, 2, 12, 6 indiqués plus haut.

Mais s'il s'agit d'un entier quelconque

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

on n'obtiendra pas la valeur du nombre des représentations propres de n par la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2$$

en se contentant de changer $\sum$ en $\prod$ dans l'expression

$$\left[3^{\beta+1}+(-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+1}-(-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum$$

du nombre total des représentations; il faut de plus, si β est > 1, remplacer le facteur

$$3^{\beta+1}+(-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)$$

par

$$8.3^{\beta-1},$$

et de même, si α est > 1, il faudra remplacer le facteur

$$2^{\alpha+1}-(-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}$$

par

$$3.2^{\alpha-1}.$$

Ce n'est que quand on a à la fois $\beta < 2$ et $\alpha < 2$ (par exemple $\alpha = 0$, $\beta = 0$) que le changement de $\sum$ en $\prod$ suffit.

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Nous sortons de la terminologie précise de Gauss en donnant le nom de forme à l'expression

$$x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2,$$

puisque le rectangle zt n'y a pas un coefficient pair; mais il est bon quelquefois d'admettre des coefficients impairs. Quoi qu'il en soit, on demande une formule simple pour calculer à priori le nombre des représentations d'un entier quelconque n par l'expression indiquée

$$x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2,$$

c'est-à-dire le nombre

$$\mathrm{N}\,(n = x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Or nous pouvons répondre tout de suite à la question proposée en nous en référant à ce qui a été dit dans l'article précédent concernant la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2.$$

On s'assure aisément en effet que la valeur de

$$\mathrm{N}\,(n = x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2)$$

et celle de

$$N(2n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2)$$

sont égales entre elles.

Si donc on pose

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m désignant un entier impair non divisible par 3, et les exposants α, β pouvant se réduire à zéro, on trouvera (en se servant des résultats et des notations de l'article cité) la valeur suivante

$$\left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+2} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum$$

pour le nombre cherché

$$N(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2).$$

2. Dans le cas particulier de $\alpha = 0$, $\beta = 0$, c'est-à-dire pour

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2),$$

cette valeur se réduit à

$$\left[3 - \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[4 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\sum:$$

savoir, à

$$10\sum$$

quand $m = 12k + 1$, mais à

$$20\sum$$

quand $m = 12k + 5$, et à

$$6\sum$$

quand $m = 12k - 5$, enfin à

$$12\sum$$

quand $m = 12k - 1$.

Pour $\alpha = 0$, $\beta = 1$, c'est-à-dire pour

$$N(3m = x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2),$$

ce serait

$$\left[9 + \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[4 - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\sum;$$

savoir,

$$30\sum$$

si $m = 12k + 1$, mais

$$24\sum$$

si $m = 12k + 5$, ou

$$50\sum$$

si $m = 12k - 5$, enfin

$$40\sum$$

si $m = 12k - 1$.

Soit en dernier lieu $\alpha = 1$, $\beta = 0$, de façon qu'on demande la valeur de

$$N(2m = x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2).$$

Cette valeur sera

$$\left[3 + \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[8 - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\sum;$$

savoir,

$$28\sum$$

quand $m = 12k + 1$, mais

$$14\sum$$

quand $m = 12k + 5$, et

$$36\sum$$

quand $m = 12k - 5$, enfin

$$18\sum$$

quand $m = 12k - 1$.

3. Veut-on maintenant le nombre des représentations propres de

$$2^{\alpha} 3^{\beta} m$$

par la forme qui nous occupe

$$x^2 + y^2 + z^2 + zt + t^2?$$

Il faudra, comme dans les deux articles précédents, former le produit

$$\Pi = \left[a^{\mu} + (-1)^{\frac{a-1}{2}} \left(\frac{a}{3}\right) a^{\mu-1}\right]\left[b^{\nu} + (-1)^{\frac{b-1}{2}} \left(\frac{b}{3}\right) b^{\nu-1}\right]\ldots,$$

au moyen des facteurs premiers a, b,... de l'entier

$$m = a^{\mu} b^{\nu} \ldots;$$

puis, considérant l'expression

$$\left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+2} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\Sigma$$

du nombre total des représentations, on y changera d'abord

$$\Sigma$$

en

$$\Pi,$$

mais en outre, si β est > 1, on y remplacera le facteur

$$3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)$$

par

$$8.3^{\beta-1},$$

et, si α est > 1, le facteur

$$2^{\alpha+2} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}$$

par

$$3.2^{\alpha}:$$

l'expression transformée sera celle qu'on cherche.

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre des représentations d'un entier donné n par la forme

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2,$$

ou, autrement dit, la détermination du nombre

$$\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2)$$

des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2,$$

se rattache à ce que nous avons donné plus haut concernant la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2.$$

Nous continuerons ici à désigner par $\mathrm{N}(n)$ le nombre des représentations de n par cette dernière forme, c'est-à-dire que nous écrirons simplement

$$\mathrm{N}(n)$$

au lieu de

$$\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2).$$

Nous continuerons aussi à poser

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m désignant un entier impair non divisible par 3, et les exposants α,

β pouvant se réduire à zéro. Enfin nous rappellerons que

$$N(2^\alpha 3^\beta m) = \left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum,$$

ou l'on désigne abréviativement par

$$\sum$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right) d,$$

relative aux groupes de diviseurs conjugués d, δ du nombre entier $m = d\delta$.

2. Cela étant, je remarque d'abord que le problème proposé pour la forme actuelle

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2$$

n'offre aucune difficulté quand il s'agit d'un entier n pair. Il est aisé en effet de prouver que, si α est > 0, on a

$$N(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2) = N(2^{\alpha-1} 3^\beta m);$$

partant la valeur de

$$N(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2)$$

est alors égale à

$$\left[3^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^\alpha - (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum.$$

Mais pour $\alpha = 0$, il faut une autre formule.

3. On pourrait ici distinguer deux cas, suivant que l'entier impair $3^\beta m$ est de la forme $4g+1$ ou de la forme $4g+3$.

Pour $3^\beta m = 4g + 1$, je trouve

$$N(3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2) = \frac{1}{3} N(2.3^\beta m),$$

tandis que, pour $3^\beta m = 4g + 3$, il vient

$$N(3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2) = \frac{1}{5} N(2.3^\beta m).$$

Mais on réunira ces deux cas en un seul, en prenant pour diviseur de l'unité dans le second membre, non plus 3 ou 5, mais

$$4 - (-1)^{\beta + \frac{m-1}{2}}.$$

En un mot la valeur générale de

$$N(3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2)$$

est le quotient de

$$N(2.3^\beta m),$$

c'est-à-dire de

$$\left[3^{\beta+1} + (-1)^\beta \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[4 - (-1)^{\beta + \frac{m-1}{2}}\right]\sum,$$

par

$$4 - (-1)^{\beta + \frac{m-1}{2}}.$$

Il y a donc simplification, puisque le dénominateur n'est autre chose qu'un des facteurs mis en évidence au numérateur. De là résulte cette formule définitive, propre à tous les cas et digne d'attention :

$$N(3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2) = \left[3^{\beta+1} + (-1)^\beta \left(\frac{m}{3}\right)\right]\sum.$$

En prenant $\beta = 0$ et distinguant les deux formes possibles de m (mod. 6), on a en particulier

$$N(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2) = 4\sum$$

si $m = 6l + 1$, tandis que

$$N(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2) = 2\sum$$

si $m = 6l - 1$.

4. Maintenant occupons-nous des représentations propres. Pour obtenir le nombre de ces représentations, il faudra au lieu de la somme

$$\sum$$

employer le produit

$$\prod$$

défini par l'équation

$$\prod = \left[a^\mu + (-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)a^{\mu-1}\right]\left[b^\nu + (-1)^{\frac{b-1}{2}}\left(\frac{b}{3}\right)b^{\nu-1}\right]\ldots,$$

où a, b,... sont les facteurs premiers de $m = a^\mu b^\nu \ldots$; mais il y a plusieurs cas à distinguer.

S'il s'agit d'un entier impair m, premier à 3, le nombre cherché s'exprimera par

$$\left[3 + \left(\frac{m}{3}\right)\right]\prod:$$

mais pour le triple d'un tel entier, on devra prendre

$$\left[9 - \left(\frac{m}{3}\right)\right]\prod.$$

Enfin s'il s'agit d'un multiple impair de 9, $3^\beta m$ avec $\beta > 1$, ce sera

$$8.3^{\beta-1}\prod.$$

Passons aux entiers impairement pairs $2.3^\beta m$. L'expression du nombre demandé sera

$$\left[3^{\beta+1} - (-1)^\beta\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2 + (-1)^{\beta + \frac{m-1}{2}}\right]\prod$$

pour $\beta = 0$ et pour $\beta = 1$, mais

$$8.3^{\beta-1}\left[2 + (-1)^{\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\Pi$$

pour $\beta > 1$.

Pour les multiples de 4, non de 8, $4.3^{\beta} m$, ce sera

$$\left[3^{\beta+1} + (-1)^{\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[3 - (-1)^{\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\Pi$$

si l'on a $\beta = 0$ ou $\beta = 1$, mais

$$8.3^{\beta-1}\left[3 - (-1)^{\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\Pi$$

si β est > 1.

Enfin, pour les multiples de 8, $2^{\alpha} 3^{\beta} m$ avec $\alpha > 2$, je trouve pour la valeur du nombre cherché :

$$3.2^{\alpha-2}\left[3^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\Pi$$

si l'exposant $\beta = 0$ ou $= 1$, mais

$$2^{\alpha+1} 3^{\beta}\,\Pi$$

si l'on a $\beta > 1$.

SUR LA FORME
$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre des représentations d'un entier donné n par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2,$$

c'est-à-dire du nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2,$$

se rattache aussi aux questions traitées ci-dessus. Il faut, cette fois encore, poser

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant un entier impair non divisible par 3 et les exposants α, β pouvant se réduire à zéro; après quoi on forme la fonction numérique

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier

$$m = d\delta.$$

La recherche du nombre

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2\right)$$

des solutions de l'équation

$$2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2$$

dépend en effet surtout de la fonction

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d$$

que nous désignons par la simple lettre

$$\sum.$$

2. Quand on a $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un entier impair

$$3^\beta m,$$

je trouve que

$$N(3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2) = \left[3^{\beta+1} - (-1)^\beta \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum.$$

En particulier si l'on prend $\beta = 0$ et si l'on ne considère que les entiers impairs premiers à 3, lesquels sont susceptibles, relativement au module 6, des deux formes distinctes

$$6l + 1$$

ou

$$6l - 1,$$

on a

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2) = 2 \sum$$

quand

$$m = 6l + 1,$$

mais

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2) = 4 \sum$$

quand

$$m = 6l - 1.$$

S'il s'agit d'un entier pair, $2^\alpha 3^\beta m$ avec $\alpha > 0$, la valeur de

$$N(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2)$$

est

$$\left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\Sigma.$$

On voit donc que les deux cas de $\alpha = 0$ et de $\alpha > 0$ sont absolument distincts.

5. Donnons maintenant le nombre des solutions propres de l'équation

$$2^{\alpha}3^{\beta}m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2,$$

et à cet effet introduisons, comme dans les articles précédents, au lieu de la somme

$$\Sigma$$

le produit

$$\Pi = \left[a^{\mu} + (-1)^{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{a}{3}\right)a^{\mu-1}\right]\left[b^{\nu} + (-1)^{\frac{b-1}{2}}\left(\frac{b}{3}\right)b^{\nu-1}\right]\ldots$$

qu'on forme à l'aide de la décomposition en facteurs premiers de l'entier

$$m = a^{\mu}b^{\nu}\ldots;$$

il faudra considérer successivement les entiers impairs, les entiers impairement pairs, les multiples de 4 non divisibles par 8, et enfin les multiples de 8.

S'il s'agit d'un entier impair m, non divisible par 3, le nombre demandé s'exprimera par

$$\left[3 - \left(\frac{m}{3}\right)\right]\Pi;$$

c'est-à-dire par

$$2\Pi$$

si

$$m = 6l + 1,$$

mais par

$$4\Pi$$

si $m = 6l - 1$.

Pour un multiple impair de 3, non de 9, comme $3m$, il faut prendre

$$\left[9 + \left(\frac{m}{3}\right)\right]\Pi;$$

et enfin s'il s'agit d'un multiple impair de 9, $3^\beta m$ avec $\beta > 1$, ce sera

$$8.3^{\beta-1}\Pi.$$

Passons aux entiers impairement pairs $2.3^\beta m$. L'expression du nombre cherché sera

$$\left[3 + \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2 - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\Pi$$

si $\beta = 0$, mais

$$\left[9 - \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\Pi$$

si $\beta = 1$, enfin

$$8.3^{\beta-1}\left[2 - (-1)^{\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\Pi$$

si l'on a $\beta > 1$.

Pour les multiples de 4, non de 8, $4.3^\beta m$, on aura, si $\beta = 0$, l'expression suivante :

$$\left[3 - \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[3 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\Pi;$$

mais, si $\beta = 1$, celle-ci

$$\left[9 + \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[3 - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\Pi;$$

enfin, si β est > 1, ce sera

$$8.3^{\beta-1}\left[3 + (-1)^{\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\Pi.$$

En dernier lieu viennent les multiples de 8, représentés par $2^\alpha 3^\beta m$ avec $\alpha > 2$. Pour ceux-là, suivant que l'on a $\beta = 0$, ou $\beta = 1$, ou enfin $\beta > 1$, l'expression du nombre cherché est

$$3.2^{\alpha-2}\left[3 - (-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right)\right]\Pi,$$

ou bien

$$3.2^{\alpha-2}\left[9 + (-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right)\right]\Pi,$$

ou enfin

$$2^{\alpha+1}3^\beta\,\Pi.$$

SUR LA FORME
$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6t^2,$$

n'offrira aucune difficulté à ceux qui se serviront de ce que nous venons de dire concernant les deux formes

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2$$

et

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2.$$

En effet, on voit sans peine que, quand n est impair,

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6t^2)$$

est précisément la moitié de

$$N(n = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2);$$

tandis que quand n est un entier pair $2q$,

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6t^2)$$

est égal à

$$N(q = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2).$$

2. D'après cela, posons généralement $n = 2^\alpha 3^\beta m$, m étant un en-

tier impair, non divisible par 3, et les exposants α, β pouvant se réduire à zéro. Soit en outre

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6t^2) = C(\alpha, \beta, m) \sum,$$

$\sum$ (comme plus tard $\prod$) conservant la même signification que dans les articles précédents, et $C(\alpha, \beta, m)$ désignant un coefficient fonction de α, β et de m, ou plutôt de m (mod. 3), dont il s'agit d'écrire la valeur. Nous y réussirons sans peine, au moyen des propositions énoncées plus haut, en distinguant les trois cas de $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha > 1$.

On a

$$C(0, \beta, m) = \frac{1}{2}\left[3^{\beta+1} + (-1)^{\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right],$$

puis

$$C(1, \beta, m) = 3^{\beta+1} - (-1)^{\beta}\left(\frac{m}{3}\right),$$

enfin, pour $\alpha > 1$,

$$C(\alpha, \beta, m) = \left[3^{\beta+1} + (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha-1} - (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right].$$

Ces formules résolvent complétement la question proposée. Je n'ai pas besoin de rappeler que $\left(\frac{m}{3}\right) = 1$ ou -1 suivant que $m = 6l + 1$ ou $6l - 1$.

3. Ajoutons quelques mots relativement au nombre des représentations propres de l'entier donné $2^{\alpha}3^{\beta}m$ par la forme qui nous occupe, c'est-à-dire relativement au nombre des solutions de l'équation

$$2^{\alpha}3^{\beta}m = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 6t^2$$

pour lesquelles aucun facteur commun > 1 ne divise à la fois x, y, z, t.

D'abord, si l'on n'excluait que les solutions pour lesquelles x, y, z, t ont avec m un diviseur commun > 1, le nombre des solutions restantes serait

$$C(\alpha, \beta, m) \prod,$$

expression qui résulte du seul changement de

$$\Sigma$$

en

$$\Pi$$

dans la formule qui donne le nombre total des solutions tant propres qu'impropres. Mais il faut aussi exclure les solutions pour lesquelles x, y, z, t ont le facteur commun 2 ou le facteur commun 3; et pour cela on doit modifier le coefficient $C(\alpha, \beta, m)$, sauf pourtant dans le cas où on aurait à la fois $\alpha < 2$ et $\beta < 2$.

Si l'on a $\alpha > 1$, mais $\beta < 2$, on remplacera $C(\alpha, \beta, m)$ par

$$C(\alpha, \beta, m) - C(\alpha - 2, \beta, m).$$

Si l'on a $\alpha < 2$, mais $\beta > 1$, on remplacera $C(\alpha, \beta, m)$ par

$$C(\alpha, \beta, m) - C(\alpha, \beta - 2, m).$$

Enfin si l'on a en même temps $\alpha > 1$ et $\beta > 1$, on remplacera $C(\alpha, \beta, m)$ par

$$C(\alpha, \beta, m) - C(\alpha - 2, \beta, m) - C(\alpha, \beta - 2, m) + C(\alpha - 2, \beta - 2, m).$$

Tout ceci dérive de principes généraux connus, et je n'insisterai pas davantage sur ce sujet.

THÉORÈME

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS CONTENUS DANS UNE QUELCONQUE DES TROIS FORMES LINÉAIRES $168k+43$, $168k+67$, $168k+163$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit m un nombre premier contenu dans une quelconque des trois formes linéaires

$$168k+43, \quad 168k+67, \quad 168k+163,$$

où l'on remarquera que

$$168 = 8.7.3.$$

Il est clair que m est congru à 3 (mod. 8), résidu quadratique de 7 et résidu quadratique de 3.

Le théorème que je veux communiquer ici consiste en ce que pour chacun des nombres premiers m dont il vient d'être question, l'on peut poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation suivante :

$$m = 21x^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

x, y étant des entiers impairs, et p un nombre premier qui ne divise pas y.

En d'autres termes, si d'un nombre premier donné m, contenu dans une quelconque des trois formes linéaires

$$168k+43, \quad 168k+67, \quad 168k+163,$$

on retranche, tant que faire se peut, les entiers formant la suite

$$21.1^2, \ 21.3^2, \ 21.5^2, \ 21.7^2, \ldots,$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la

forme canonique

$$2p^{4l+1}y^2,$$

y étant un entier (naturellement impair) et p un nombre premier, non diviseur de y. On admet, comme d'ordinaire, la valeur $l = 0$.

Nous n'imposons à priori aucune condition au nombre premier p; mais d'après ce qu'on a dit du nombre m auquel se rapporte l'équation

$$m = 21.x^2 + 2p^{4l+1}y^2,$$

il est clair que l'on aura $p \equiv 3 \pmod{4}$, p résidu quadratique de 7, p non résidu quadratique de 3. Donc p ne peut appartenir qu'à une des formes linéaires

$$84g + 11, \quad 84g + 23, \quad 84g + 71;$$

et on va voir, en effet, les nombres premiers 11, 23, 71, etc., figurer comme valeurs de p dans les exemples numériques ci-après.

Les nombres premiers les plus petits que fournissent pour m les trois formes linéaires

$$168k + 43, \quad 168k + 67, \quad 168k + 163$$

sont

$$43,\ 67,\ 163,\ 211,\ 331,\ 379,\ 499,\ 547,\ 571,\ 739,\ \text{etc.}$$

Voyons comment notre théorème se vérifie sur chacun d'eux.

Pour $m = 43$, on a l'équation canonique

$$43 = 21.1^2 + 2.11.1^2;$$

pour $m = 67$ et pour $m = 163$, on a semblablement

$$67 = 21.1^2 + 2.23.1^2,$$

puis

$$163 = 21.1^2 + 2.71.1^2.$$

Pour $m = 211$, on a deux restes; d'abord

$$211 - 21.1^2 = 190 = 2.5.19,$$

ce qui ne donne pas une équation canonique, mais ensuite

$$211 - 21.3^2 = 2.11.1^2,$$

d'où l'équation canonique

$$211 = 21.3^2 + 2.11.1^2.$$

Pour chacun des trois nombres premiers

$$331,\ 379,\ 499,$$

on a de même deux restes, dont un seul est canonique. Ainsi, pour

$$m = 331,$$

il vient d'abord

$$331 - 21.1^2 = 310 = 2.5.31,$$

mais ensuite

$$331 - 21.3^2 = 2.71.1^2.$$

Pour

$$m = 379,$$

on a, d'une part

$$379 - 21.1^2 = 2.179.1^2,$$

et d'autre part

$$379 - 21.3^2 = 190 = 2.5.19.$$

Enfin, pour

$$m = 499,$$

les restes sont

$$499 - 21.1^2 = 2.239.1^2$$

et

$$499 - 21.3^2 = 310 = 2.5.31.$$

Notre théorème se vérifie également pour les nombres premiers

$$547,\ 571,\ 739;$$

pour ceux-là il y a trois restes, tous les trois canoniques.

Pour

$$m = 547,$$

ces restes sont

$$547 - 21.1^2 = 2.263.1^2,$$

puis

$$547 - 21.3^2 = 2.179.1^2,$$

enfin

$$547 - 21.5^2 = 2.11.1^2.$$

Pour

$$m = 571,$$

il vient

$$571 - 21.1^2 = 2.11.5^2,$$

puis

$$571 - 21.3^2 = 2.191.1^2,$$

enfin

$$571 - 21.5^2 = 2.23.1^2.$$

En dernier lieu, soit

$$m = 739;$$

on a

$$739 - 21.1^2 = 2.359.1^2,$$

puis

$$739 - 21.3^2 = 2.11.5^2,$$

enfin

$$739 - 21.5^2 = 2.107.1^2.$$

Je ne pense pas qu'il soit utile de pousser plus loin ces calculs; mais si loin qu'on veuille aller, notre théorème ne peut manquer d'être confirmé.

SUR LA FORME

$$x^2 + xy + y^2 + z^2 + zt + t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande le nombre N des représentations d'un entier donné quelconque n, par la forme

$$x^2 + xy + y^2 + z^2 + zt + t^2,$$

c'est-à-dire le nombre N des solutions de l'équation indéterminée

$$n = x^2 + xy + y^2 + z^2 + zt + t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Comme le facteur 3, quand il divise n, joue un rôle à part dans la solution de la question proposée, je ferai

$$n = 3^\alpha q,$$

q étant un entier pair ou impair, mais premier à 3; et je dirai d'abord que la valeur de n ne dépend pas de l'exposant α, en sorte qu'elle est la même que si l'on avait simplement $n = q$. Elle ne dépend, en effet, que de la somme des diviseurs de q, somme que nous représenterons à notre ordinaire par $\zeta_1(q)$, et l'on a

$$N = 12\zeta_1(q).$$

Ainsi, pour $n = 1$, on a les douze représentations qui répondent aux valeurs suivantes de x, y, z, t :

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad t = 0,$$
$$x = 0, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad t = 0,$$

$$\begin{array}{llll}
x=0, & y=0, & z=0, & t=1, \\
x=0, & y=0, & z=1, & t=0, \\
x=-1, & y=0, & z=0, & t=0, \\
x=0, & y=-1, & z=0, & t=0, \\
x=0, & y=0, & z=-1, & t=0, \\
x=0, & y=0, & z=0, & t=-1, \\
x=1, & y=-1, & z=0, & t=0, \\
x=-1, & y=1, & z=0, & t=0, \\
x=0, & y=0, & z=1, & t=-1, \\
x=0, & y=0, & z=-1, & t=1;
\end{array}$$

et pour

$$n = 3^{\alpha},$$

on aurait de même

$$n = 12.$$

Pour

$$n = 500$$

et pour

$$n = 3^{\alpha}.500,$$

ce qui répond toujours à

$$q = 500 = 2^2.5^3,$$

comme

$$\zeta_1(500) = 7.156 = 1092,$$

il viendra

$$N = 12.1092,$$

partant

$$N = 13104.$$

2. Nous venons de déterminer le nombre total N des solutions tant propres qu'impropres de l'équation

$$n = x^2 + xy + y^2 + z^2 + zt + t^2.$$

Mais on pourrait aussi désirer d'avoir à part le nombre M des solu-

tions propres, pour lesquelles aucun facteur > 1 ne divise à la fois x, y, z, t. Or il n'y a jamais de telles solutions quand n est divisible par 9, vu qu'alors tous les entiers x, y, z, t sont divisibles nécessairement par le facteur commun 3, ainsi qu'il est facile de s'en assurer. Si donc on pose, comme ci-dessus,

$$n = 3^\alpha q,$$

q étant un entier premier à 3, on aura

$$M = 0$$

toutes les fois que l'exposant α sera > 1.

Restent les valeurs $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, d'où les entiers

$$n = q, \quad n = 3q,$$

pour lesquelles la valeur de M sera la même. Voici de quelle fonction numérique de q, M dépend alors. Soient a, b,..., les facteurs premiers de q, en sorte que

$$q = a^\mu b^\nu \ldots,$$

et posons

$$Z_1(q) = (a^\mu + a^{\mu-1})(b^\nu + b^{\nu-1})\ldots;$$

nous aurons, dans les conditions indiquées,

$$M = 12 Z_1(q).$$

On reconnaît dans la fonction

$$Z_1(q)$$

une fonction numérique déjà employée par nous, et antérieurement employée aussi par Eisenstein à l'occasion du nombre des représentations propres d'un entier impair par une somme de quatre carrés.

Ici l'entier q, qui figure dans

$$Z_1(q),$$

est premier à 3, mais indifféremment pair ou impair, et quand il est pair le facteur 2 est compris dans les facteurs a, b,..., dont il a été question plus haut. Soit, par exemple,

$$q = 500 = 2^2 . 5^3,$$

on aura

$$Z_1(q) = (2^2 + 2)(5^3 + 5^2) = 900;$$

et par suite le nombre M des représentations propres de chacun des deux entiers

$$500, \quad 1500$$

par la forme

$$x^2 + xy + y^2 + z^2 + zt + t^2$$

sera égal au produit

$$12.900,$$

c'est-à-dire égal à

$$10800.$$

NOUVELLE THÉORIE DES DIAMÈTRES;

PAR M. F. LUCAS,
Ingénieur des Ponts et Chaussées à Nice.

§ Ier. — *Points centraux d'un système de points en ligne droite.*

1. *Des points centraux d'un système de points en ligne droite.* — Considérons sur une droite un système de points fixes

$$A_1,\ A_2,\ldots,\ A_p$$

et un point mobile V. Le produit de segments

$$VA_1 \times VA_2 \times \ldots \times VA_p$$

varie, quand V se déplace, et devient maximum pour certaines positions du point mobile. Nous appellerons ces positions les *points centraux* du système proposé.

Prenons sur la droite une origine d'abscisses O et désignons par

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_p$$

les abscisses des points donnés; par x l'abscisse du point mobile V. Nous aurons évidemment

$$A_1V \times A_2V \times \ldots \times A_pV = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_p) = f(x),$$

$f(x)$ désignant une fonction algébrique entière, du degré p, qui s'annule pour les valeurs $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_p$ de la variable x, et dans laquelle le terme en x^p a pour coefficient l'unité.

Les abscisses des points centraux cherchés sont les racines de l'équation

$$f'(x) = 0,$$

et par conséquent les points centraux d'un système de p points en ligne droite forment un groupe de $(p-1)$ points.

2. *Cas où un ou plusieurs des points donnés vont à l'infini.* — Mettant à part un des points donnés, A_1, par exemple, nous poserons

$$f(x) = (x - a_1)\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant du degré $(p-1)$.

Nous aurons alors

$$f'(x) = (x - a_1)\varphi'(x) + \varphi(x) = (x - a_1)\left[\varphi'(x) + \frac{\varphi(x)}{x - a_1}\right].$$

Par conséquent, si a_1 augmente indéfiniment, l'équation $f'(x) = 0$ tendra à prendre la forme

$$(x - a_1)\varphi'(x) = 0$$

et à se décomposer en ces deux autres

$$\begin{cases} (x - a_1) = 0, \\ \varphi'(x) = 0. \end{cases}$$

Donc :

Si l'un des points donnés est à l'infini, il fait partie des points centraux du système, et les autres points centraux sont précisément ceux relatifs au système qu'on obtient en supprimant le point à l'infini parmi les points donnés.

De même, si nous mettons à part les points $A_1, A_2, \ldots, A_q$, nous poserons

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_q)\psi(x),$$

$\psi(x)$ désignant une fonction du degré $p - q$, et nous aurons

$$f'(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_q)\left[\psi'(x) + \sum_1^r \frac{\psi(x)}{(x - a_r)}\right],$$

la sommation par valeurs entières se rapportant à l'indice r.

Par conséquent, lorsque $a_1, a_2, \ldots, a_q$ augmentent indéfiniment, l'é-

quation $f'(x) = 0$ tend à se décomposer dans les suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} x = a_1, \\ x = a_2, \\ \cdots\cdots \\ x = a_q, \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \psi'(x) = 0.$$

Donc :

Si q des points donnés sont à l'infini, ils font partie des points centraux du système, et les autres points centraux sont précisément ceux relatifs au système qu'on obtient en supprimant, parmi les points donnés, les points à l'infini.

3. *Cas où plusieurs des points donnés coïncident.* — Supposons maintenant que les points $A_1, A_2, \ldots, A_q$ coïncident sans aller à l'infini, et désignons par α leur abscisse commune. Nous poserons

$$f(x) = (x - \alpha)^q \varphi(x),$$

d'où nous déduirons

$$f'(x) = (x - \alpha)^{q-1} [q\varphi(x) + (x - \alpha)\varphi'(x)];$$

α sera donc $(q - 1)$ fois racine de l'équation

$$f'(x) = 0,$$

et par conséquent :

Si q des points donnés coïncident en un seul, ce point appartient $(q - 1)$ fois aux points centraux du système.

4. *Propriété projective.* — Projetons sur une droite quelconque de l'espace les divers points de la droite donnée, en faisant usage de plans parallèles entre eux.

Désignons par x' l'abscisse de la projection du point dont l'abscisse est x, la nouvelle origine des abscisses étant la projection de l'ancienne origine.

Nous aurons

$$x = kx',$$

k désignant une constante qui dépend de la direction des plans projetants.

Conséquemment les abscisses des projections des points A_1, A_2, etc., seront les racines de l'équation

$$F(x') = f(kx) = 0,$$

et les abscisses des projections des points centraux seront les racines de l'équation

$$kf'(x) = F'(x') = 0.$$

Par conséquent :

La figure formée par un système de points en ligne droite et par leurs points centraux est douée des propriétés projectives.

C'est-à-dire que les projections des points centraux du système donné sont les points centraux du système projeté.

§ II. — *Diamètres, pôles de l'infini et courbes centrales dans les courbes géométriques.*

5. *Définition des diamètres.* — Étant donnée une courbe du degré p, si l'on mène les sécantes parallèles à une direction donnée et si l'on prend sur chacune de ces droites les points centraux du système de ses intersections avec la courbe, on formera le *diamètre* de la direction considérée.

Soit

$$f(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe donnée, et désignons par m le coefficient angulaire de la direction des sécantes; ces droites seront représentées par l'équation

$$y = mx + \lambda$$

dans laquelle λ est un paramètre arbitraire.

Donnons à λ une valeur quelconque mais fixe; la sécante correspondante rencontrera la courbe en des points que nous projetterons sur l'axe des x. Les abscisses de ces projections seront les racines de l'équation

$$f(x, mx + \lambda) = 0,$$

et les abscisses des points centraux du système de points ainsi formé

seront les racines de l'équation

$$f'_x(x, mx + \lambda) + mf'_{mx+\lambda}(x, mx + \lambda) = 0.$$

Ces points centraux sont donc les projections, sur l'axe des x, des points que déterminent les deux équations simultanées

$$\begin{cases} y = mx + \lambda \\ f'_x(x, y) + mf'_y(x, y) = 0; \end{cases}$$

et par conséquent, en vertu de ce qui a été dit au n° 4, ces deux équations représentent les *points centraux* du système des points d'intersection de la sécante et de la courbe.

Or la dernière de ces équations est indépendante du paramètre λ; elle est donc l'équation même du diamètre cherché.

Par conséquent le diamètre de la direction dont le coefficient angulaire est m est une courbe du degré $(p - 1)$ ayant pour équation

$$f'_x + mf'_y = 0.$$

6. *Pôles de l'infini.* — Si l'on donne à m toutes les valeurs possibles, on obtiendra toute la série des diamètres. On reconnaît sans peine que ces courbes passent toutes par les points, au nombre de $(p - 1)^2$, dont les coordonnées satisfont aux équations simultanées

$$\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0. \end{cases}$$

Par conséquent :

Les diamètres pivotent un groupe de $(p - 1)^2$ points fixes du plan.

Nous appellerons ces points remarquables les *pôles de l'infini* de la courbe donnée. Cette dénomination se justifie par certaines considérations auxquelles nous ne pourrions donner place dans ce Mémoire, qu'en sortant du cadre restreint que nous nous sommes imposé.

On reconnaît aisément que si la courbe donnée possède des points singuliers, ces points font nécessairement partie des pôles de l'infini, et que si, le degré de la courbe étant supposé pair, cette courbe

admet un centre, ce point fait aussi partie du groupe dont il s'agit.

7. *Courbe centrale.* — Le diamètre de la direction dont le coefficient angulaire est m est une courbe qui admet elle-même des pôles de l'infini, au nombre de $(p-2)^2$, déterminés par les équations simultanées

$$\begin{cases} f''_{x^2} + mf''_{x,y} = 0, \\ f''_{x,y} + mf''_{y^2} = 0. \end{cases}$$

Éliminant m entre ces deux équations, nous aurons le lieu géométrique des pôles de l'infini dans les divers diamètres. Cette courbe, que nous appelons la *courbe centrale*, a pour équation

$$f''_{x^2} f''_{y^2} = (f''_{x,y})^2;$$

elle est algébrique et du degré $2(p-1)$.

Lorsque $p=3$, les diamètres sont des coniques dont les centres sont les pôles de l'infini, et la courbe centrale est elle-même une conique.

8. *Propriétés des diamètres.* — Considérons une direction quelconque et menons à la courbe une tangente parallèle à cette direction.

Cette droite, considérée comme sécante, présente un point d'intersection double, lequel, en vertu de ce qui a été dit au n° 3, appartient comme point simple aux points centraux du système des intersections.

Par conséquent :

Le diamètre d'une direction quelconque rencontre la courbe donnée aux points où les tangentes sont parallèles à cette direction.

Considérons maintenant une asymptote de la courbe. Sur cette droite considérée comme sécante, le point à l'infini figure comme point d'intersection double, et par conséquent, d'après ce que nous avons vu au n° 2, il fait deux fois partie du système des points centraux des intersections.

Par conséquent :

Le diamètre de la direction d'une asymptote est asymptote à cette droite.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur cette théorie des diamètres, bien qu'elle puisse se prêter à de plus amples développements, surtout si l'on considère des diamètres de différents ordres ou diamètres dans les diamètres. Mais pour donner un exemple du parti que l'on peut tirer de cette théorie dans l'étude des courbes géométriques, nous allons exposer la classification des courbes du troisième degré.

§ III. — *Classification des courbes du troisième degré.*

9. *Division analytique en trois familles.* — L'équation générale des courbes du troisième degré peut être mise sous la forme

$$f(x, y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + cx^2 + 2fxy + gy^2 + hx + ky + l = 0.$$

Si l'on considère la fonction

$$D = (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2),$$

laquelle est le *discriminant* de la fonction homogène

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

on pourra faire, sur la valeur numérique de cette fonction, les trois hypothèses suivantes :

1° $D < 0$,

2° $D > 0$,

3° $D = 0$.

A chacune de ces hypothèses correspond une *famille* de courbes, en sorte que nous adopterons la classification suivante :

1° $D < 0$, *famille hyperbolique;*

2° $D > 0$, *famille elliptique;*

3° $D = 0$, *famille parabolique.*

Cette classification purement analytique et les dénominations que nous venons d'employer peuvent être justifiées par trois espèces de considérations géométriques. C'est ce que nous allons démontrer.

10. *Points à l'infini.* — Imaginons une droite menée par l'origine des coordonnées et passant par un point à l'infini, réel ou imaginaire, de la courbe, et désignons par μ le coefficient angulaire de cette droite.

Les valeurs de μ seront évidemment les racines de l'équation

$$d\mu^3 + 3c\mu^2 + 3b\mu + a = 0.$$

Posons

$$\mu = \mu' + \frac{c}{d},$$

et portons cette valeur dans l'équation précédente; nous aurons, réductions faites,

$$\mu'^3 + 3\left(\frac{b}{d} - \frac{c^2}{d^2}\right)\mu' + \left(2\frac{c^3}{d^3} - 3\frac{bc}{d^2} + \frac{a}{d}\right)^2 = 0.$$

Cette équation, et par conséquent l'équation en μ, admettent *des racines réelles et inégales*, ou *des racines l'une réelle et les deux autres imaginaires*, ou *des racines réelles dont deux au moins sont égales*, suivant que la fonction

$$H = 4\left(\frac{b}{d} - \frac{c^2}{d^2}\right)^3 + \left(\frac{2c^3}{d^3} + \frac{3bc}{d^2} + \frac{a}{d}\right)^2$$

est *négative*, ou *positive*, ou *nulle*.

Or, si l'on développe la fonction H et si l'on effectue les réductions qui se présentent, on trouve

$$H = \frac{1}{d^4} D,$$

et comme le facteur $\frac{1}{d^4}$ est nécessairement positif et ne peut être nul, on voit que les deux fonctions H et D sont en même temps négatives, positives ou nulles.

Par conséquent :

Si $D < 0$, la courbe présente à l'infini trois points réels et distincts

auxquels correspondent trois branches infinies hyperboliques, et on a la *famille hyperbolique*.

Si $D > 0$, la courbe présente à l'infini un seul point, réel et simple, correspondant à une branche hyperbolique. Les courbes de cette famille se composent généralement d'une branche infinie et d'une courbe fermée dont la forme rappelle celle de l'ellipse; de là la dénomination de *famille elliptique*.

Si $D = 0$, la courbe aura à l'infini soit un point simple et un point double, soit un point triple. Au point multiple à l'infini correspondront généralement des branches paraboliques; de là la dénomination de *famille parabolique*.

11. *Diamètres.* — Si nous formons l'équation du diamètre conjugué de la direction dont le coefficient angulaire est m, en nous bornant aux termes du deuxième degré, nous trouverons

$$(a + mb)x^2 + 2(b + mc)xy + (c + md)y^2 + \ldots = 0.$$

La nature de la conique (ellipse, hyperbole ou parabole) représentée par cette équation dépend du signe ou de la nullité de la fonction

$$(b + mc)^2 - 4(a + mb)(c + md),$$

fonction que l'on peut écrire

$$(c^2 - bd)m^2 + (bc - ad)m + b^2 - ac = 0.$$

Les *diamètres paraboliques* correspondent aux valeurs de m qui sont racines de l'équation

$$(c^2 - bd)m^2 + (bc - ad)m + b^2 - ac = 0.$$

Or cette équation a des racines imaginaires, ou réelles et inégales, ou égales (parfois indéterminées), selon que la fonction

$$D = (bc - ad)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd)$$

est négative, ou positive, ou nulle.

D'où il résulte que le nombre des *diamètres paraboliques* est *nul* dans la *famille hyperbolique, égal à deux* dans la *famille elliptique, égal à un* ou *indéterminé* dans la *famille parabolique*.

12. *Conique centrale.* — Enfin la division en trois familles peut encore être justifiée par la considération de la courbe centrale, laquelle est une section conique.

Si l'on forme l'équation de cette courbe

$$\frac{d^2 f}{dx^2}\frac{d^2 f}{dy^2} = \left(\frac{d^2 f}{dx\,dy}\right)^2,$$

en se bornant aux termes du deuxième degré, on trouve

$$9\left[(ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y\right] + \ldots = 0,$$

et l'on voit sans peine que la conique centrale est une *ellipse* dans la *famille hyperbolique*, pour laquelle on a $D < 0$; une *hyperbole* dans la *famille elliptique*, pour laquelle on a $D > 0$; et une *parabole* dans la *famille parabolique*, pour laquelle on a $D = 0$.

13. *Résumé.* — Les considérations qui précèdent peuvent se résumer dans le tableau suivant :

DÉSIGNATION de la famille.	VALEUR de D.	NATURE des points à l'infini.	NOMBRE des diamètres paraboliques.	NATURE de la conique centrale.
Famille hyperbolique...	$D < 0$	3 points simples.	0	Ellipse.
Famille elliptique.....	$D > 0$	1 seul point simple.	2	Hyperbole.
Famille parabolique.....	$D = 0$	1 point simple et 1 point double ou 1 point triple.	1 ou l'infini.	Parabole.

14. *Équation simplifiée de la famille hyperbolique.* — Considérons une courbe de la famille hyperbolique, et prenons pour axe des y l'asymptote d'une branche infinie. Le diamètre de la direction de cette droite est une hyperbole conique qui admet pour asymptotes l'axe des y et une autre droite que nous prendrons pour axe des x.

Dans ces conditions, l'équation de ce diamètre,

$$\frac{df}{dy} = 3dy^2 + 6cxy + 3bx^2 + 2gy + 2fx + k = 0,$$

doit se réduire à la forme

$$xy = \text{const.}$$

Donc

$$b = d = f = g = 0,$$

et l'équation de la courbe se réduit à

$$ax^3 + 3cxy^2 + ex^2 + hx + ky + l = 0.$$

La fonction D devient égale à $4ac^3$, et comme elle doit être négative, on voit que a et c ne peuvent pas être nuls et que leurs signes sont différents.

Par conséquent l'équation générale des courbes de la famille hyperbolique peut être ramenée à la forme simplifiée

$$(1) \qquad xy^2 + \varepsilon y = \alpha^2 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

15. *Equation simplifiée de la famille elliptique.* — Si nous considérons maintenant la famille elliptique, nous pourrons encore prendre pour axe des y l'asymptote de la branche hyperbolique et déterminer l'axe des x par les mêmes considérations que ci-dessus. Observant en outre que la fonction D est nécessairement positive, nous arriverons à la forme simplifiée

$$(2) \qquad xy^2 + \varepsilon y = -\alpha^2 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

16. *Equation simplifiée de la famille parabolique.* — Nous subdiviserons les courbes de la famille parabolique en deux classes, suivant que le point multiple à l'infini est *double* ou *triple*.

Ire Classe. — *Courbes ayant à l'infini un point simple et un point double.*

Au point simple à l'infini correspond une branche hyperbolique. Nous prendrons encore l'asymptote de cette branche pour axe des y

et nous déterminerons l'axe des x comme précédemment. La fonction D doit être nulle; d'ailleurs c ne peut pas être égal à zéro, sans quoi le point à l'infini de l'axe des y serait un point triple de la courbe. L'équation se réduit donc à la forme

$$(3) \qquad xy^2 + \varepsilon y = \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

IIe Classe. — *Courbes ayant un point triple à l'infini.*

Prenons pour axe des y une droite passant par le point à l'infini et pour axe des x une droite arbitraire.

L'équation en μ devant avoir, dans cette hypothèse, trois racines infinies, nous aurons

$$b = c = d = 0,$$

et l'équation générale des courbes de cette classe prendra la forme

$$ax^3 + ex^2 + 2fxy + gy^2 + hx + ky + l = 0.$$

Le diamètre conjugué de la direction de l'axe des y a pour équation

$$2fx + 2gy + k = 0.$$

Il se réduit à une droite qui peut être inclinée sur l'axe des y, ou parallèle à l'axe des y, ou située tout entière à l'infini. De là trois cas à examiner :

Ier Cas. — Prenons pour axe des x la droite dont il vient d'être parlé; nous aurons

$$k = f = 0,$$

et l'équation générale des courbes correspondantes prendra la forme

$$(4) \qquad y^2 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

IIe Cas. — Prenons pour axe des x une droite quelconque, mais choisissons pour axe des y la droite même qui représente le diamètre de la direction du point à l'infini. Nous aurons pour équation géné-

rale des courbes comprises dans le IIe cas

$$(5) \qquad xy = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

IIIe Cas. — Dans le IIIe cas, on a par hypothèse

$$f = g = 0,$$

et l'équation de la courbe se réduit à

$$ax^3 + ex^2 + hx + ky + l = 0.$$

Suivant que k est différent de zéro ou égal à zéro, on arrive à l'une ou à l'autre des deux formes

$$(6) \qquad y = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

$$(7) \qquad 0 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

17. *Dénominations newtoniennes.* — Les équations simplifiées (1), (2),..., (6) auxquelles nous sommes arrivés par la considération des diamètres, sont précisément celles qui ont été données par Newton dans son *Enumeratio linearum tertii ordinis;* il en résulte que la classification qui vient d'être exposée peut s'exprimer au moyen des dénominations newtoniennes de la manière suivante :

Famille hyperbolique.	Hyperboles redondantes...	$(xy^2 + \varepsilon y = \underline{\alpha}^2 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)$.
Famille elliptique...	Hyperboles défectives.....	$(xy^2 + \varepsilon y = -\underline{\alpha}^2 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)$.
Famille parabolique..	1re CLASSE.	
	Hyperboles paraboliques..	$(xy^2 + \varepsilon y = \underline{\beta} x^2 + \gamma x + \delta)$.
	Hyperbolismes de coniques.	$(xy^2 + \varepsilon y = \gamma x + \delta)$.
	2e CLASSE.	
	Paraboles divergentes.....	$y^2 = \underline{\alpha} x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.
	Tridents.....	$xy = \underline{\alpha} x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.
	Paraboles cubiques.....	$y = \underline{\alpha} x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.
	Droites parallèles.....	$0 = \underline{\alpha} x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.

Le trait placé sous un coefficient indique qu'il ne peut pas être nul.

De la discussion des équations simplifiées résulte la subdivision des

genres en espèces, laquelle a été donnée par Newton et complétée par Stirling. Ce dernier a compté quatre-vingt-une espèces; Newton n'en avait fait connaître que soixante-seize, par suite de l'omission des systèmes de trois droites parallèles que représente l'équation (7).

18. *Observations relatives aux équations précédentes.* — Pour obtenir les équations générales simplifiées des hyperboles redondantes, des hyperboles défectives, des hyperboles paraboliques et des hyperbolismes de coniques, nous avons complétement déterminé les axes des coordonnées.

Mais pour obtenir les équations générales des courbes de la IIe classe de la famille parabolique, nous avons laissé une certaine indétermination dans le choix des axes. Il en résulte que ces dernières équations peuvent, sans rien perdre de leurs généralités, recevoir des simplifications nouvelles : c'est ce que nous allons développer.

Paraboles divergentes. — L'axe des y n'ayant été déterminé que de direction, nous pouvons transporter l'origine des coordonnées en un point de rencontre de l'axe des x et de la courbe. Nous aurons alors $\delta = 0$, et l'équation prendra la forme

$$y^2 = \underline{\alpha} x^3 + \beta x^2 + \gamma x.$$

Tridents. — L'axe des x étant resté arbitraire, nous pouvons disposer de sa position.

Le diamètre de la direction dont le coefficient angulaire est égal à 2β est une parabole représentée par l'équation

$$y = 3\alpha x^2 + \gamma;$$

l'axe des y rencontre ce diamètre au point dont l'ordonnée est $y = \gamma$. Plaçons l'origine en ce point de rencontre et prenons pour axe des x la tangente à la parabole, nous aurons nécessairement $\gamma = 0$, et l'équation prendra la forme

$$xy = \underline{\alpha} x^3 + \beta x^2 + \delta.$$

Parabole cubique. — La direction de l'axe des y a seule été déterminée, cet axe étant assujetti à passer par le point à l'infini.

Le diamètre de la direction dont le coefficient angulaire est m a pour équation

$$3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma - m = 0;$$

il se compose généralement de deux droites parallèles à l'axe des y et se réduit à une droite double pour la valeur particulière

$$m = \gamma - \frac{\beta^2}{3\alpha}.$$

Prenons cette droite double pour axe des y; nous aurons

$$\beta = 0,$$

et l'équation de la courbe deviendra

$$y = \alpha x^3 + \gamma x + \delta.$$

Le nouvel axe des y coupe la courbe au point dont l'ordonnée est $y = \delta$; prenons ce point pour origine des coordonnées et dirigeons l'axe des x suivant la tangente à la courbe; l'équation se réduira à la forme très-simple

$$y = \underline{\alpha} x^3.$$

Droites parallèles. — Laissant l'axe des x arbitraire, on peut évidemment disposer de la position de l'axe des y, dont la direction seule est déterminée, de manière à faire disparaître le terme en x^2. On arrive ainsi à l'équation simplifiée

$$0 = \underline{\alpha} x^3 + \beta x + \delta.$$

19. *Nouvelle forme de l'équation générale des hyperboles défectives.* — La considération de la conique centrale peut, comme celle des diamètres, conduire à des formes simplifiées pour les équations des courbes du troisième degré. Nous en donnerons un exemple pour les courbes de la famille elliptique.

Reprenons l'équation générale

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + ex^2 + 2fxy$$
$$+ gy^2 + hx + ky + l = 0.$$

On en déduit l'équation générale de la conique centrale

$$9[(ac-b^2)x^2+(ad-bc)xy+(bd-c^2)y^2]$$
$$+3[(ag-2bf+ce)x+(bg-2cf+de)y]+ge-f^2=0.$$

Lorsqu'il s'agit d'une hyperbole défective, la conique centrale est une hyperbole. Si nous prenons pour axes des coordonnées les deux asymptotes de cette courbe, l'équation précédente devra se réduire à la forme

$$xy=\text{const.},$$

et nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} ac-b^2&=0,\\ bd-c^2&=0,\\ ag-2bf+ce&=0,\\ bg-2cf+de&=0.\end{aligned}\right.$$

Une combinaison très-simple des deux premières équations donne

$$b(bc-ad)=0.$$

Or $(bc-ad)$, coefficient de xy dans l'équation de l'hyperbole centrale, ne peut pas être nul ; donc $b=0$ et conséquemment, d'après la seconde équation, $c=0$.

Les deux dernières équations se réduisent alors à $ag=0$ et $de=0$. D'autre part le discriminant D devient égal à a^2d^2 ; donc ni a ni d ne peuvent être nuls, et par conséquent $g=0$, $e=0$.

Le système des quatre équations ci-dessus posées équivaut donc au système

$$b=c=g=e=0,$$

et l'équation générale des hyperboles défectives se présente sous la forme

$$ax^3+by^3+2cxy+dx+ey+f=0,$$

tres-analogue à la forme de l'équation générale des coniques.

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2,$$

dont nous voulons nous occuper ici, se rattache à la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

que nous avons considérée dans le cahier d'avril.

Pour un entier donné quelconque n (ou $2^\alpha 3^\beta m$, m impair premier à 3) nous avons trouvé le nombre

$$\mathrm{N}(n)$$

des représentations de n, par la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$, égal à

$$\left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum,$$

en désignant par la simple lettre

$$\sum$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right) d,$$

ou, si l'on veut,

$$\sum \left(\frac{3}{\delta}\right) d,$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$. De plus, nous

avons distingué les représentations où $z^2 + 3t^2$ est un entier impair de celles où $z^2 + 3t^2$ est un entier pair, et en appelant

$$N'(n)$$

le nombre des premières, nous avons obtenu

$$N'(n) = 2^\alpha \left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum.$$

Mais on peut aussi vouloir considérer séparément les représentations de n où la valeur de t est impaire et celles où la valeur de t est paire. Soit donc

$$N_0(n)$$

le nombre de celles-ci, c'est-à-dire soit $N_0(n)$ le nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

pour lesquelles t est un entier pair. Il est clair que ce nombre

$$N_0(n)$$

sera précisément le nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2,$$

en y prenant pour x, y, z, t des entiers quelconques. Ainsi $N_0(n)$ est le nombre des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2,$$

dont nous allons parler aujourd'hui. Notre objet actuel est en effet de donner des règles simples pour calculer $N_0(n)$.

2. La valeur de $N_0(n)$ est bien facile à trouver quand l'entier n est divisible par 4; car on voit aisément que, pour $\alpha > 1$, l'on a

$$N_0(2^\alpha 3^\beta m) = N(2^{\alpha-2} 3^\beta m).$$

Dans l'hypothèse de $\alpha > 1$, la valeur de

$$N_0(2^\alpha 3^\beta m)$$

est donc

$$\left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha-1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum.$$

Pour un entier impairement pair

$$2.3^\beta m,$$

il n'est pas difficile non plus d'arriver à l'équation

$$N_0(2.3^\beta m) = \frac{3}{2}N'(2.3^\beta m),$$

en sorte que

$$N_0(2.3^\beta m) = 3\left[3^{\beta+1} + (-1)^\beta\left(\frac{m}{3}\right)\right]\sum.$$

Mais le cas d'un entier impair n (ou $3^\beta m$) exige une étude plus délicate et l'introduction d'une fonction numérique nouvelle.

3. Soit donc n (ou $3^\beta m$) un entier impair. Posons de toutes les manières possibles l'équation

$$4n = i^2 + 3j^2,$$

i et j désignant des entiers impairs positifs; puis formons la somme

$$\sum(-1)^{\frac{j-1}{2}} j,$$

relative à toutes les valeurs de j. Cette somme, que nous représenterons par la simple lettre

$$\sigma,$$

constitue la fonction numérique nouvelle dont nous avons à tenir compte.

Je trouve en effet que l'on a, pour tout entier impair n,

$$N_0(n) = \frac{1}{2}N(n) + 3\sigma.$$

Je n'ai pas besoin de rappeler que pour $n = 3^\beta m$, la valeur de $N(n)$ est

$$\left[3^{\beta+1} - (-1)^\beta \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2 + (-1)^{\beta + \frac{m-1}{2}}\right]\sum.$$

On remarquera que σ n'est pas fonction de m seulement, mais de m et de β. Il est bon aussi de faire observer que la valeur de σ est tantôt positive, tantôt négative; j'ajoute que souvent on a $\sigma = 0$, et qu'en particulier cela arrive toujours quand m est $\equiv 5 \pmod 6$, puisque l'équation

$$4n = i^2 + 3j^2$$

n'est possible qu'autant que les facteurs premiers qui entrent dans la composition de m avec un exposant impair sont de la forme $6l + 1$.

4. Ajoutons quelques exemples; et d'abord soit $n = 5$, d'où $\sigma = 0$, puis

$$\sum = 4.$$

La formule

$$N_0(n) = \frac{1}{2} N(n) + 3\sigma$$

du n° 3 donnera

$$N_0(5) = 24,$$

et cela s'accorde avec l'équation

$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 12.0^2$$

qui fournit vingt-quatre représentations en y permutant de toutes les manières possibles les trois carrés

$$(\pm 2)^2,\ (\pm 1)^2,\ 0^2.$$

Soit en second lieu

$$n = 7,$$

d'où

$$4n = 1^2 + 3.3^2$$

et

$$4n = 5^2 + 3.1^2,$$

par conséquent

$$\sigma = -2.$$

Comme d'un autre côté

$$\sum = 6,$$

notre formule donnera

$$N_0(7) = 0,$$

et en effet l'équation

$$7 = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2$$

est impossible.

Soit encore

$$n = 9 = 3^2.1,$$

d'où

$$4n = 3^2 + 3.3^2,$$

et par conséquent

$$\sigma = -3.$$

Comme d'ailleurs on a ici $m = 1$, et par suite

$$\sum = 1,$$

il viendra

$$N_0(9) = 30.$$

Or l'entier 9 a effectivement trente représentations, qui sont fournies par les deux identités

$$9 = 3^2 + 0^2 + 0^2 + 12.0^2$$

et

$$9 = 2^2 + 2^2 + 1^2 + 12.0^2$$

en y affectant du double signe les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables.

Enfin soit

$$n = 13,$$

d'où

$$4n = 5^2 + 3.3^2$$

et

$$4n = 7^2 + 3.1^2,$$

partant

$$\sigma = -2.$$

On a cette fois

$$\sum = 14$$

et

$$N_0(13) = 36.$$

Or l'entier 13 a effectivement trente-six représentations, faciles à déduire des deux identités

$$13 = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 12.1^2$$

et

$$13 = 3^2 + 2^2 + 0^2 + 12.0^2.$$

5. Prenons maintenant des entiers pairs, et par conséquent faisons usage des formules du n° 2.

Pour $n = 12$, c'est-à-dire pour

$$n = 2^2.3.1,$$

on a $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $m = 1$, partant

$$\sum = 1.$$

La formule à employer est celle qui concerne les multiples de 4. On en conclut

$$N_0(12) = 10;$$

or cela s'accorde avec les deux équations

$$12 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 12.0^2$$

et

$$12 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 12.1^2$$

qui fournissent bien dix représentations.

Soit à présent $n = 10 = 2.5$. Il s'ensuivra $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $m = 5$, et

$$\sum = 4.$$

La formule à employer est celle qui concerne les entiers impairement

pairs. Elle donne

$$N_0(10) = 24.$$

Or on trouve effectivement vingt-quatre représentations pour l'entier 10, au moyen de l'identité

$$10 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 12.0^2,$$

en y permutant de toutes les manières possibles les trois carrés

$$(\pm 3)^2,\ (\pm 1)^2,\ 0^2.$$

Considérons encore l'entier impairement pair $n = 14$, d'où

$$n = 2.7,$$

et partant

$$\beta = 0, \quad m = 7,$$

puis

$$\sum = 6.$$

Il nous viendra

$$N_0(14) = 72,$$

et l'on vérifiera sans peine l'exactitude de ce résultat au moyen des deux identités

$$14 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 12.0^2$$

et

$$14 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 12.1^2,$$

qui fournissent pour l'entier 14 soixante-douze représentations.

6. Rapprochons, en terminant, la fonction numérique

$$\sigma$$

de quelques fonctions du même genre, qui ont avec celle-là un lien intime. On se rappelle que n désignant un entier impair donné, nous posons de toutes les manières possibles l'équation

$$4n = i^2 + 3j^2,$$

les entiers i et j étant impairs positifs, après quoi

$$\sigma = \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j.$$

Or on peut aussi considérer la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i;$$

et je trouve que l'on a

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i = \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j$$

quand $n = 4g + 1$, tandis que

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i = -3 \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j$$

quand $n = 4g + 3$.

Maintenant, à côté des décompositions de $4n$, prenons celles de n sous la forme $r^2 + 3s^2$; et nous obtiendrons un autre résultat curieux.

Soit d'abord

$$n = 4g + 1, \quad \text{et} \quad n = r^2 + 3s^2,$$

l'entier r étant impair positif, tandis que s est indifféremment positif, nul ou négatif. Je trouve, pour ce cas, l'équation

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r = (-1)^g \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j.$$

Soit, en second lieu,

$$n = 4g + 3, \quad \text{et} \quad n = r^2 + 3s^2,$$

l'entier s étant cette fois impair et positif, tandis que l'entier r est indifféremment positif, nul ou négatif. Je trouve, pour ce cas, l'équation

$$\sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} s = (-1)^g \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j.$$

On voit donc que d'autres fonctions numériques auraient pu remplacer la fonction σ dans nos formules. Peut-être trouvera-t-on qu'en employant n au lieu de $4n$ les calculs seraient plus simples. J'ai préféré la fonction σ afin de n'avoir qu'une seule formule à écrire pour exprimer $N_0(n)$ dans le cas de n impair.

SUR LA FORME

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande le nombre

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2.$$

Or on pourra tout de suite répondre à cette question, si l'on s'en réfère à l'article précédent où nous avons déterminé le nombre

$$N_0(n)$$

des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2.$$

Nous supposons donc connue la valeur de

$$N_0(n),$$

c'est-à-dire de

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2);$$

et de là nous passerons à celle de

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2)$$

en considérant successivement quatre cas très-distincts.

2. Soit d'abord n impair et de la forme $4g + 1$. Nous répondons

alors à la question proposée en disant que

$$N(4g+1 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2) = \frac{1}{3} N_0(4g+1).$$

Ainsi, ayant trouvé dans l'article précédent

$$N_0(9) = 30,$$

nous pouvons affirmer qu'il y a dix représentations de l'entier 9 par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2:$$

ce sont celles que fournissent les deux identités

$$9 = (\pm 3)^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 12.0^2$$

et

$$9 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 2.0^2 + 12.0^2,$$

en y opérant les permutations convenables.

De même, ayant vu que

$$N_0(13) = 36,$$

on est certain de trouver

$$N(13 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2) = 12;$$

or c'est là en effet ce qui résulte des équations

$$13 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 12.(\pm 1)^2$$

et

$$13 = (\pm 3)^2 + 2.(\pm 1)^2 + 2.(\pm 1)^2 + 12.0,^2$$

dont la première fournit pour l'entier 13 quatre représentations, tandis que la seconde en fournit huit.

5. Maintenant, soit

$$n = 4g + 3.$$

Je dis que nous aurons, dans ce cas,

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2) = N_0(n).$$

Ainsi, par cela seul qu'on a trouvé plus haut

$$N_0(7) = 0,$$

nous avons aussi

$$N(7 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2) = 0.$$

De même on a

$$N(3 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2) = N_0(3),$$

la valeur commune des deux membres étant alors $= 8$, ainsi qu'il est aisé de le vérifier.

On ajoutera, si on le désire, d'autres exemples. Je passe aux nombres impairement pairs.

4. Soit n un nombre impairement pair, de façon que

$$n = 2(2g + 1).$$

La formule pour ce cas est

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2) = \frac{1}{3} N_0(n).$$

Ayant donc trouvé

$$N_0(10) = 24,$$

nous sommes autorisés à affirmer que

$$N(10 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2) = 8;$$

or c'est ce qui résulte des deux équations

$$10 = 0^2 + 2(\pm 2)^2 + 2(\pm 1)^2 + 12.0^2$$

et

$$10 = 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 2)^2 + 12.0^2.$$

Semblablement, de

$$N_0(14) = 72,$$

nous devons conclure

$$N(14 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2) = 24,$$

ce qui résulte effectivement des deux identités

$$14 = 0^2 + 2.1^2 + 2.0^2 + 12.1^2$$

et

$$14 = 2^2 + 2.1^2 + 2.2^2 + 12.0^2,$$

en y donnant le double signe $\pm$ aux racines des carrés qui ne sont pas nuls et en effectuant les permutations convenables.

5. Je termine par le cas le plus simple, celui de n multiple de 4. On a alors

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2) = N_0(n),$$

ce qui est en quelque sorte évident. Je me bornerai donc à l'exemple de $n = 12$; et de

$$N_0(12) = 10,$$

je conclurai

$$N(12 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2) = 10;$$

or on a, en effet, dix représentations du nombre 12, par la forme

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12t^2,$$

au moyen des identités

$$12 = 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 12(\pm 1)^2,$$
$$12 = (\pm 2)^2 + 2(\pm 2)^2 + 2.0^2 + 12.0^2,$$
$$12 = (\pm 2)^2 + 2.0^2 + 2(\pm 2)^2 + 12.0^2.$$

Je ne pense pas qu'il soit utile de pousser plus loin ces vérifications numériques.

SUR LA FORME

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre

$$N(n = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2)$$

des représentations de n, par la forme

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2,$$

peut aussi être ramenée facilement à celle du nombre

$$N_0(n)$$

des représentations de n par la forme

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2.$$

La valeur de

$$N_0(n)$$

ayant donc été donnée plus haut pour les divers cas qui peuvent se présenter, nous la supposerons connue dans tout ce qui va suivre, et nous y rattacherons la valeur demandée de

$$N(n = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2).$$

2. Qu'il s'agisse d'abord d'un entier n impair. Il pourra être de la forme

$$4g + 1$$

ou de la forme

$$4g + 3.$$

Or on a

$$N(4g+1 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2) = \frac{2}{3} N_0(4g+1)$$

et

$$N(4g+3 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2) = 0.$$

L'exactitude de la seconde de ces formules est évidente, et la première formule est facile à établir

Prenons, comme premier exemple, $n = 9$. On a

$$N_0(9) = 30.$$

Donc

$$N(9 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2) = 20,$$

et cela est confirmé par les équations

$$9 = (\pm 3)^2 + 0^2 + 4.0^2 + 12.0^2,$$
$$9 = 0^2 + (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 12.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 4(\pm 1)^2 + 12.0^2,$$
$$9 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 12.0^2,$$

qui donnent pour l'entier 9 vingt représentations.

Soit ensuite

$$n = 13.$$

Comme on a trouvé

$$N_0(13) = 36,$$

il s'ensuivra

$$N(13 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2) = 24.$$

Or, des identités

$$13 = 3^2 + 2^2 + 4.0^2 + 12.0^2,$$
$$13 = 3^2 + 0^2 + 4.1^2 + 12.0^2,$$
$$13 = 1^2 + 0^2 + 4.0^2 + 12.1^2,$$

on tire pour l'entier 13 vingt-quatre représentations en affectant du

double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables.

3. Soit à présent n impairement impair,

$$n = 2(2g+1).$$

Je trouve que dans ce cas

$$N(n = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2) = \frac{1}{3} N_0(n).$$

Ayant donc obtenu

$$N_0(10) = 24,$$

nous sommes autorisés à affirmer que

$$N(10 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2) = 8,$$

et cela s'accorde avec les équations

$$10 = (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 12.0^2,$$
$$10 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 12.0^2,$$

qui fournissent, pour l'entier 10, huit réprésentations.

Semblablement, de

$$N_0(14) = 72,$$

nous tirons

$$N(14 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2) = 24;$$

or c'est bien là ce qui résulte des trois identités que voici :

$$14 = (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 + 4(\pm 1)^2 + 12.0^2,$$

puis

$$14 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 12.0^2,$$

enfin

$$14 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 12(\pm 1)^2.$$

4. Enfin soit n multiple de 4, c'est-à-dire soit

$$n = 2^\alpha(2g+1),$$

avec $\alpha > 1$. On voit immédiatement que l'on a alors

$$N(n = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2) = N_0(n).$$

Soit par exemple

$$n = 12.$$

On a

$$N_0(12) = 10;$$

on aura donc aussi

$$N(12 = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2) = 10.$$

Or on constate qu'il existe en effet dix représentations de l'entier

$$12$$

par la forme

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2,$$

au moyen des identités

$$12 = 0^2 + 0^2 + 4.0^2 + 12(\pm 1)^2$$

et

$$12 = (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 4(\pm 1)^2 + 12.0^2,$$

dont la première fournit deux représentations, tandis que la seconde en fournit huit.

Je ne crois pas utile d'ajouter d'autres exemples; mais quels que soient ceux qu'on veuille choisir, on ne pourra que confirmer l'exactitude de nos formules.

SUR LA FORME
$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre

$$N(n = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2,$$

ne peut offrir aucune difficulté à ceux qui se souviennent de ce que nous avons dit concernant les deux formes

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

et

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2.$$

On sait que, pour abréger, nous écrivons simplement

$$N(n)$$

au lieu de

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2)$$

et

$$N_0(n)$$

au lieu de

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2).$$

Indiquons maintenant comment les valeurs de $N(n)$ et de $N_0(n)$ étant connues pour tout entier n, on en conclut

$$N(n = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2).$$

2. Mettons d'abord de côté le cas de n impair $4g+3$, et celui de n impairement pair, pour lesquels on a évidemment

$$N(n = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2) = 0.$$

Restent les deux cas de n impair $4g+1$, et de n multiple de 4, c'est-à-dire de $n = 4g$.

Or on prouve facilement que

$$N(4g+1 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2) = \frac{1}{3} N_0(4g+1)$$

et que

$$N(4g = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2) = N(g).$$

Ainsi, par exemple, ayant trouvé

$$N_0(13) = 36,$$

on est autorisé à affirmer que

$$N(13 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2) = 12;$$

et cette valeur s'accorde effectivement avec les identités

$$13 = (\pm 3)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 12.0^2,$$
$$13 = (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 12.0^2,$$
$$13 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 12(\pm 1)^2,$$

qui fournissent douze représentations de l'entier 13 par la forme

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2.$$

SUR LA FORME
$3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre

$$N(n = 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2,$$

se rattache aussi aux fonctions numériques

$$N(n), \quad N_0(n)$$

que nous avons employées dans l'article précédent. Mais d'abord il faut observer que l'on a évidemment

$$N(n = 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2) = 0$$

quand n est un entier impair $4g + 1$, et quand n est impairement pair, c'est-à-dire quand

$$n = 2(2g + 1).$$

Il n'y a donc véritablement que deux cas à traiter, celui de n impair $4g + 3$ et celui de n multiple de 4.

2. Soit d'abord n multiple de 4. Posons alors

$$n = 4.2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant un entier impair non divisible par 3, et les exposants α, β pou-

vant se réduire à zéro. L'équation

$$4.2^{\alpha}3^{\beta}m = 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2$$

exige que x soit pair. Je fais donc $x = 2u$, et en divisant par 4, j'obtiens

$$2^{\alpha}3^{\beta}m = y^2 + z^2 + t^2 + 3u^2,$$

ce qui nous ramène à la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$ dont nous nous sommes occupés dans le cahier d'avril : nous avons donné dans ce cahier la valeur du nombre

$$\mathrm{N}\left(2^{\alpha}3^{\beta}m\right)$$

des représentations de l'entier

$$2^{\alpha}3^{\beta}m$$

par cette forme. Or il suit de ce qui précède que

$$\mathrm{N}\left(4.2^{\alpha}3^{\beta}m = 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2\right) = \mathrm{N}\left(2^{\alpha}3^{\beta}m\right).$$

La valeur demandée de

$$\mathrm{N}\left(n = 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2\right)$$

sera donc maintenant facile à calculer pour tout entier n multiple de 4.

5. Soit enfin n impair $4g + 3$. On verra dans ce cas très-facilement que

$$\mathrm{N}(4g + 3 = 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2) = \mathrm{N}(4g + 3) - \mathrm{N}_0(4g + 3).$$

La fonction

$$\mathrm{N}_0(4g + 3),$$

qui exprime le nombre des solutions de l'équation

$$4g + 3 = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2,$$

a été introduite dans le cahier de mai, et nous savons que

$$N_0(4g+3) = \frac{1}{2} N(4g+3) + 3\sigma,$$

σ désignant la somme

$$\sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j$$

qui se rapporte aux valeurs que j peut prendre dans l'équation

$$4(4g+3) = i^2 + 3j^2,$$

où i et j sont des entiers impairs positifs. On peut donc encore écrire

$$N(4g+3 = 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2) = \frac{1}{2} N(4g+3) - 3\sigma.$$

Qu'il s'agisse, par exemple, de l'entier 3. On a $N(3) = 10$, et l'équation

$$12 = 3^2 + 3.1^2$$

donne $\sigma = 1$. Donc

$$N(3 = 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2) = \frac{1}{2} \cdot 10 - 3 = 2,$$

ce qui est exact.

Pour l'entier 7, on a $N(7) = 12$, et les équations

$$4.7 = 1^2 + 3.3^2, \quad 4.7 = 5^2 + 3.1^2$$

donnent $\sigma = -3 + 1 = -2$. Donc

$$N(7 = 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2) = \frac{1}{2} \cdot 12 + 6 = 12;$$

or, en effet, l'équation

$$7 = 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2$$

a douze solutions qui résultent de l'identité

$$7 = 3(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2$$

en y permutant les trois derniers carrés.

SUR LA FORME
$x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande une expression simple du nombre

$$N(n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2,$$

c'est-à-dire une expression simple du nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers quelconques positifs, nuls ou négatifs.

Comme cette équation peut s'écrire

$$n = x^2 + y^2 + (2t)^2 + 3z^2,$$

on comprend qu'elle se rattache à l'équation

$$n = X^2 + Y^2 + Z^2 + 3T^2,$$

pour laquelle le nombre

$$N(n)$$

des solutions a été donné dans le cahier d'avril. Mais, ici, nous n'admettons plus pour Z que des valeurs paires; et cela change beaucoup l'état de la question.

2. Soit d'abord n impair, et posons de toutes les manières possibles

l'équation

$$4n = i^2 + 3j^2,$$

en y prenant pour i et j des entiers impairs positifs. La somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

relative aux diverses valeurs de i, et que nous désignerons par la simple lettre

$$\tau,$$

jouera ici un rôle utile. Nous la préférons cette fois à la fonction σ, relative à j, pour n'avoir pas à distinguer les deux cas de $n \equiv 1$ et de $n \equiv 3$ (mod. 4). Je trouve en effet que, dans le cas de n impair quelconque,

$$\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2) = \frac{1}{2}\mathrm{N}(n) + \tau.$$

Si donc on fait, comme dans le cahier d'avril, $n = 3^\beta m$, m impair premier à 3, on aura, suivant les notations employées dans ce cahier, pour le nombre demandé

$$\mathrm{N}(n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2),$$

l'expression explicite

$$\frac{1}{2}\left[3^{\beta+1} - (-1)^\beta \left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2 + (-1)^{\beta + \frac{m-1}{2}}\right]\sum + \tau.$$

3. Qu'il s'agisse maintenant d'un entier impairement pair

$$2.3^\beta m.$$

Je trouve qu'alors il y a égalité entre

$$\mathrm{N}(2.3^\beta m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4z^2)$$

et

$$\mathrm{N}(3^\beta m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2).$$

En vertu d'une formule donnée aussi dans le cahier d'avril, on a donc

$$N(2.3^\beta m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2) = \left[3^{\beta+1} + (-1)^\beta \left(\frac{m}{3}\right)\right] \sum.$$

Pour un entier pairement pair,

$$n = 2^\alpha 3^\beta m, \quad \alpha > 1,$$

il faut encore recourir au cahier d'avril, car on trouve que, dans ce cas,

$$N(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2) = \frac{1}{3} N(2^{\alpha-2} 3^\beta m) + \frac{2}{3} N(2^\alpha 3^\beta m).$$

Dans le cas de

$$\alpha > 1,$$

la valeur explicite de

$$N(2^\alpha 3^\beta m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2)$$

est donc

$$\left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta} \left(\frac{m}{3}\right)\right] \left[3.2^{\alpha-1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right] \sum.$$

SUR LA FORME
$x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2$;

Par M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre

$$N(n = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2,$$

est très-simple quand on fait usage des fonctions

$$N(n), \quad N'(n)$$

introduites dans le cahier d'avril à l'occasion de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

et de la fonction

$$N_0(n)$$

dont on a donné la valeur dans le cahier de mai en s'occupant de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2.$$

2. Considérant d'abord un entier impair $4g + 1$, on prouve sans peine que

$$N(4g + 1 = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2) = \frac{1}{3} N_0(4g + 1).$$

Ainsi, ayant reconnu que

$$N_0(9) = 30,$$

on est en droit d'affirmer que

$$N(9 = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2) = 10,$$

et cela est confirmé par les équations

$$9 = (\pm 3)^2 + 3.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 3.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$

dont la première fournit deux représentations et la seconde huit représentations de l'entier 9 sous la forme voulue.

De même, ayant trouvé

$$N_0(13) = 36,$$

on en conclura

$$N(13 = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2) = 12;$$

ce qui s'accorde avec les équations

$$13 = (\pm 1)^2 + 3(\pm 2)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$13 = (\pm 3)^2 + 3.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$13 = (\pm 3)^2 + 3.0^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$

dont chacune fournit quatre représentations.

3. Pour un entier impair $4g + 3$, on établit aisément l'équation

$$N(4g + 3 = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2) = N(4g + 3) - N_0(4g + 3).$$

Ainsi, ayant

$$N(3) = 10$$

et

$$N_0(3) = 8,$$

on devra avoir

$$N(3 = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2) = 2.$$

C'est l'équation

$$3 = 0^2 + 3(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2$$

qui fournit ici les deux représentations annoncées.

De même, puisque l'on a

$$N(7) = 12,$$

et

$$N_0(7) = 0,$$

on en conclura

$$N(7 = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2) = 12;$$

ce qui s'accorde avec les équations

$$7 = (\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 4\,0^2 + 4.0^2,$$
$$7 = 0^2 + 3(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$7 = 0^2 + 3(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$

qui donnent pour l'entier 7 douze représentations.

4. Passons aux entiers pairs; et d'abord observons que l'équation

$$2(2g + 1) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2$$

étant évidemment impossible, on a

$$N[2(2g + 1) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2] = 0.$$

Nous n'avons donc à nous occuper que des multiples de 4, $n = 4g$. Or, pour eux, on prouve facilement que

$$N(4g = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2) = N(g) + 2N'(g).$$

Si donc on pose

$$g = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant un entier impair, non divisible par 3, et l'exposant α pouvant se réduire à zéro, on tirera des formules du cahier d'avril cette conclusion explicite que la valeur de

$$N(4.2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2)$$

est égale à

$$\left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+2} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\Sigma,$$

où

$$\Sigma$$

désigne, on s'en souvient, la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right) d,$$

relative aux groupes de diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$.

Par exemple, on a

$$N(4 = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2) = 10;$$

et, en effet, les équations

$$\begin{aligned}
4 &= (\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,\\
4 &= (\pm 2)^2 + 3.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,\\
4 &= 0^2 + 3.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,\\
4 &= 0^2 + 3.0^2 + 4.0^2 + 4(\pm 1)^2
\end{aligned}$$

fournissent pour l'entier 4 dix représentations sous la forme voulue.

On trouve aussi

$$N(12 = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2) = 30,$$

résultat aisé à vérifier. Mais je ne veux pas pousser plus loin ces calculs.

SUR LA FORME

$$2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2;$$

Par M. J. LIOUVILLE.

1. On demande le nombre

$$N(n = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2)$$

des représentations de n par la forme

$$2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2,$$

c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation

$$n = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Cette question ne peut nous offrir aucune difficulté quand il s'agit d'un entier pair $n = 2g$. En effet l'équation

$$2g = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2$$

exige que z soit pair. Soit donc $z = 2z_1$, d'où

$$2g = 2x^2 + 2y^2 + 12z_1^2 + 4t^2;$$

en divisant par 2 et changeant l'ordre des deux derniers termes, notre équation reviendra à celle-ci

$$g = x^2 + y^2 + 2t^2 + 6z_1^2.$$

Or cette dernière équation a été discutée dans le cahier d'avril (p. 124).

2. Désormais donc nous supposerons l'entier n impair, et en em-

ployant, comme dans l'article précédent, les expressions

$$N(n)$$

et

$$N_0(n)$$

introduites dans les cahiers d'avril et de mai pour représenter les valeurs respectives de

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2)$$

et de

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2),$$

nous obtiendrons facilement la solution de notre problème.

Soit d'abord

$$n = 4g + 1.$$

On démontrera aisément que

$$N(4g + 1 = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2) = \frac{1}{3}[N(4g + 1) - N_0(4g + 1)].$$

Ainsi, par exemple, ayant

$$N(5) = 48$$

et

$$N_0(5) = 24,$$

on en conclura que

$$N(5 = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 8,$$

ce qui s'accorde avec les équations

$$5 = 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 4.0^2$$

et

$$5 = 2.0^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$

qui fournissent pour l'entier 5 huit représentations sous la forme voulue.

De même ayant

$$N(9) = 78$$

et

$$N_0(9) = 30,$$

on est assuré que

$$N(9 = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 16;$$

et c'est ce que confirment les identités

$$9 = 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$9 = 2.0^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$

qui fournissent pour l'entier 9 seize représentations.

3. Soit à présent

$$n = 4g + 3.$$

On prouvera sans peine que

$$N(4g + 3 = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2) = N(4g + 3) - N_0(4g + 3).$$

La question proposée sera ainsi complétement résolue.

Par exemple, ayant

$$N(3) = 10$$

et

$$N_0(3) = 8,$$

on en conclura que

$$N(3 = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 2,$$

ce qui est vérifié par l'équation

$$3 = 2.0^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 4.0^2.$$

De même, comme on a

$$N(7) = 12$$

et

$$N_0(7) = 0,$$

on peut être assuré que

$$N(7 = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 12;$$

les identités

$$7 = 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 4.0^2$$

et

$$7 = 2.0^2 + 2.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2$$

confirment ce fait.

Ayant

$$N(11) = 48$$

et

$$N_0(11) = 24,$$

on en conclura semblablement

$$N(11 = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 24,$$

résultat facile à vérifier. Mais en voilà assez sur ce sujet.

Il n'est pas nécessaire d'ajouter que l'on n'aura qu'à remplacer nos fonctions auxiliaires par leurs valeurs connues pour arriver dans chaque cas à une formule explicite donnant directement la valeur demandée de

$$N(n = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4t^2).$$

REMARQUES NOUVELLES SUR LA FORME $x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Dans le cahier d'avril, où nous nous sommes d'abord occupés de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

et de quelques formes qui se rattachent à celle-là, nous avons déterminé non-seulement le nombre complet

$$N(n)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

où n est un entier donné et x, y, z, t des entiers quelconques positifs, nuls ou négatifs, mais séparément aussi le nombre

$$N'(n)$$

des solutions de cette équation pour lesquelles $z^2 + 3t^2$ est un entier impair, et le nombre

$$N''(n) = N(n) - N'(n)$$

de celles pour lesquelles $z^2 + 3t^2$ est un entier pair. En posant $n = 2^\alpha 3^\beta m$ (m impair, premier à 3), on a

$$N(n) = \left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\sum$$

et

$$N'(n) = 2^\alpha\left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\sum,$$

en désignant, pour abréger, par la simple lettre

$$\sum$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d,$$

ou, si l'on veut,

$$\sum \left(\frac{3}{\delta}\right) d,$$

relative aux groupes de diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$.

2. Nous plaçant ensuite à un autre point de vue, nous avons cherché, dans le cahier de mai, le nombre

$$N_0(n)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

pour lesquelles t est pair, ce qui revient à chercher le nombre total des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers quelconques.

Si l'on demandait au contraire le nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

pour lesquelles t est impair, nous répondrions naturellement que ce nombre

$$N_1(n)$$

est égal à

$$N(n) - N_0(n).$$

En continuant à poser $n = 2^\alpha 3^\beta m$, nous avons trouvé que pour $\alpha > 1$ l'on a

$$N_0(2^\alpha 3^\beta m) = N(2^{\alpha-2} 3^\beta m).$$

Le cas de $\alpha = 1$ est résolu par la formule

$$N_0(2.3^\beta m) = \frac{3}{2} N'(2.3^\beta m).$$

Enfin le cas de $\alpha = 0$, ou de n impair $= 3^\beta m$, le seul qui offrît des difficultés, a exigé l'introduction d'une fonction numérique nouvelle

$$\sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j,$$

que nous avons représentée par la simple lettre

$$\sigma$$

et qui se rapporte aux entiers j, impairs et positifs, qui peuvent figurer dans l'équation

$$4n = i^2 + 3j^2,$$

où l'entier i est aussi impair et positif. On a, en effet, dans l'hypothèse de n impair :

$$N_0(n) = \frac{1}{2} N(n) + 3\sigma.$$

3. Les fonctions numériques

$$N(n),\ N'(n),\ N_0(n),\ N''(n),\ N_4(n),$$

dont les trois premières déterminent les deux autres, sont très-importantes, et nous ont été, comme on l'a vu, de la plus grande utilité pour l'étude de plusieurs formes nouvelles. Trois fonctions numériques d'un haut intérêt ramenées à des expressions simples, trois questions essentielles (tout à fait distinctes) complétement résolues et donnant lieu sans beaucoup de peine à de nombreux corollaires et à des développements curieux, voilà ce que contiennent au fond les quatre feuilles du cahier d'avril, les deux dernières feuilles du cahier de mai et les deux feuilles qui précèdent celle-ci. Mais il sera bon d'ajouter encore quelques remarques et de pénétrer ainsi plus profondément dans le cœur du sujet.

Montrons d'abord comment on peut diviser en quatre classes les solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

que nous n'avions jusqu'ici divisées qu'en deux classes, sous un double aspect, il est vrai; ce qui conduit naturellement à la division en quatre classes.

En effet, l'entier t peut être pair ou impair, et la somme $z^2 + 3t^2$ peut aussi être paire ou impaire. La distinction des deux cas relatifs à t a été faite au moyen d'un indice 0 ou 1 appliqué à la lettre N, et celle des deux cas relatifs à $z^2 + 3t^2$ au moyen d'un accent double ou simple. Employons à la fois ces deux notations, et nous aurons obtenu la division en quatre classes.

Je désigne donc par

$$N''_0(n)$$

le nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

pour lesquelles t et $z^2 + 3t^2$ sont à la fois des entiers pairs, c'est-à-dire pour lesquelles t et z sont pairs.

Il est clair que

$$N''_0(n)$$

est précisément le nombre complet des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 4z^2 + 12t^2,$$

où les entiers x, y, z, t seraient quelconques. Or ce nombre, nous l'avons donné à la fin du cahier de mai. La valeur de

$$N''_0(n)$$

est donc connue.

Pour n impair $4g + 3$, on a

$$N''_0(n) = 0,$$

tandis que pour $n = 4g + 1$, l'on trouve

$$N''_0(n) = \frac{2}{3} N_0(n),$$

ou, ce qui revient au même,

$$N''_0(n) = \frac{1}{3} N(n) + 2\sigma.$$

Pour n impairement pair, $n = 2(2g + 1)$, la formule est

$$N''_0(n) = \frac{1}{3} N_0(n),$$

ou, si l'on veut,

$$N''_0(n) = \frac{1}{2} N'(n).$$

Enfin, pour n pairement pair, la formule est

$$N''_0(n) = N_0(n),$$

ou bien, en faisant $n = 4g$,

$$N''_0(4g) = N(g).$$

4. Le nombre

$$N'_0(n)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

pour lesquelles t est pair et z impair (d'où $z^2 + 3t^2$ entier impair) est maintenant facile à calculer; car on a évidemment

$$N'_0(n) + N''_0(n) = N_0(n),$$

d'où

$$N'_0(n) = N_0(n) - N''_0(n).$$

De là résulte, pour n multiple de 4, $n = 4g$, l'équation

$$N'_0(4g) = 0,$$

ce qu'on voit à priori devoir être.

Pour n impairement pair, $n = 2(2g+1)$, la formule est

$$N'_0(n) = \frac{2}{3} N'(n).$$

Pour n impair $4g+3$, on a

$$N'_0(n) = N_0(n),$$

ou, si l'on veut,

$$N'_0(n) = \frac{1}{2} N(n) + 3\sigma.$$

Enfin, pour $n = 4g+1$,

$$N'_0(n) = \frac{1}{3} N_0(n).$$

c'est-à-dire

$$N'_0(n) = \frac{1}{6} N(n) + \sigma.$$

5. Pour trouver le nombre

$$N'_1(n)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

pour lesquelles t et $z^2 + 3t^2$ à la fois ont une valeur impaire, c'est-à-dire pour lesquelles t est impair et z pair, on observera que

$$N'_1(n) + N'_0(n) = N'(n),$$

ce qui donne la formule

$$N'_1(n) = N'(n) - N'_0(n),$$

où le second membre est actuellement connu.

De même, le nombre

$$N''_1(n)$$

relatif au cas de t impair et de $z^2 + 3t^2$ entier pair, c'est-à-dire de t et z impairs à la fois, s'exprimera par

$$N''_1(n) = N''(n) - N''_0(n),$$

ou bien encore par

$$N''_1(n) = N(n) - N'(n) - N''_0(n).$$

Les quatre nombres partiels

$$N'_0(n),\ N''_0(n),\ N'_1(n),\ N''_1(n),$$

dont le total fait

$$N(n),$$

sont donc connus séparément; et cela doit servir à résoudre plus d'un problème digne d'intérêt. On peut en effet varier de bien des manières les questions relatives à la représentation des nombres par une forme donnée, en imposant aux indéterminées de la forme des conditions particulières, au lieu d'admettre indifféremment tous les nombres entiers. Or, quand ces conditions portant sur une ou plusieurs des indéterminées x, y, z, t, ne seront relatives qu'au module 2, c'est-à-dire quand il ne s'agira que de distinctions relatives à des entiers pairs ou impairs dans le calcul du nombre de solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

ce calcul sera facile au moyen des fonctions

$$N'_0(n),\ N''_0(n),\ N'_1(n),\ N''_1(n).$$

6. Pour le montrer de la manière la plus simple, parcourons toutes les hypothèses que l'on peut faire sur les valeurs de x, y, z, t (mod. 2) en les supposant fixées d'avance.

On peut prendre l'entier t pair et x, y, z impairs. Mais l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

n'a alors de solutions que si $n = 4g + 3$; et quand on a effectivement

$$n = 4g + 3,$$

on voit tout de suite que le nombre des solutions est

$$N'_0(n),$$

ou bien encore

$$N_0(n),$$

car alors

$$N'_0(n) = N_0(n).$$

Le nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

quand on exige que t soit pair et x, y, z impairs, est donc égal à $N'_0(n)$, ou à zéro, suivant que n est ou n'est pas de la forme $4g + 3$.

On peut prendre l'entier t pair, ainsi qu'un des entiers x, y, z, les deux autres étant impairs. Prenons, par exemple, t et z pairs, x et y impairs. Alors l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

ne sera possible que si $n = 4g + 2$, et dans ce cas le nombre des solutions sera

$$N''_0(n).$$

On peut exiger qu'un seul des entiers x, y, z soit impair et que les deux autres soient pairs aussi bien que t. Exigeons, par exemple, que z soit impair et que x, y, t soient pairs. Dans ce cas, l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

ne sera possible que si n est de la forme $4g + 1$; et pour $n = 4g + 1$, le nombre des solutions sera

$$N'_0(n).$$

Le cas où l'on prendrait x, y, z, t pairs à la fois est en quelque sorte insignifiant. L'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

n'est possible alors que pour n multiple de 4. Et quand $n = 4g$, on

n'a qu'à faire $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$, $t = 2t_1$, pour ramener l'équation proposée à celle-ci

$$g = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 3t_1^2;$$

le nombre des solutions est donc $N(g)$.

Prenons à présent t impair, et x, y, z pairs. L'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

ne sera alors possible que si $n = 4g + 3$; et dans le cas de

$$n = 4g + 3,$$

le nombre des solutions dont elle jouit est évidemment

$$N'_1(n),$$

ou si l'on veut

$$N_1(n),$$

car on a ici

$$N'_1(n) = N_1(n).$$

Maintenant, que t étant impair, un des entiers x, y, z soit impair, les deux autres pairs. Que par exemple, avec t impair, on ait z impair, x et y pairs. Dans ces conditions, l'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

ne sera possible que si $n = 4g$; mais dans le cas de $n = 4g$, le nombre des solutions sera

$$N''_1(n).$$

Prenons toujours t impair, et que de plus deux des entiers x, y, z soient impairs, le troisième pair. Que, par exemple, avec t impair, on veuille avoir x et y impairs, z pair. L'équation

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

ne sera possible alors que si $n = 4g + 1$; mais dans le cas de

$n = 4g + 1$, le nombre des solutions sera

$$N'_1(n).$$

Il nous reste à examiner le cas où l'on prendrait x, y, z et t impairs à la fois. Mais avant de m'en occuper (et de le développer avec quelque étendue à cause de l'intérêt qu'il offre), je remarquerai que quand il s'agit d'entiers impairs on n'a aucun avantage à leur donner le double signe $\pm$; admettre le double signe pour une, deux, trois ou quatre indéterminées impaires, c'est tout simplement doubler, quadrupler, multiplier par 8 ou par 16 le nombre des solutions qui auraient lieu sans cela : il n'en est pas de même pour les entiers pairs, à cause du zéro.

7. Supposons donc que voulant représenter par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$$

un entier donné n, on n'admette pour x, y, z, t que des entiers impairs et positifs. Quel sera dans ce cas le nombre

$$\mathfrak{N}(n)$$

des représentations? Il est bien clair qu'il sera nul si n n'est pas de la forme $8l + 6$. Mais quelle est la valeur de

$$\mathfrak{N}(8l + 6)?$$

Pour répondre à cette question, j'observe d'abord que si tout en prenant x, y, z, t impairs dans l'équation

$$8l + 6 = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

on admettait pour ces indéterminées le double signe $\pm$, le nombre des représentations deviendrait

$$16\mathfrak{N}(8l + 6).$$

D'ailleurs, dès que t est impair dans l'équation proposée, x, y, z ne

peuvent être qu'impairs. Donc, en ajoutant à

$$16\mathfrak{N}(8l+6)$$

le nombre

$$N_0(8l+6)$$

des représentations pour lesquelles t est pair, on aura le nombre total

$$N(8l+6)$$

des représentations. Je conclus de là que

$$\mathfrak{N}(8l+6) = \frac{1}{16}[N(8l+6) - N_0(8l+6)],$$

équation dont le second membre est connu par nos formules.

Les entiers de la forme $8l+6$ se divisent en quatre classes qu'il est bon de distinguer, en sorte que notre équation se décompose dans les quatre suivantes. On a

$$\mathfrak{N}[2.3^{2\gamma+1}(12k+1)] = \frac{3^{2\gamma+2}-1}{8}\sum,$$

puis

$$\mathfrak{N}[2.3^{2\gamma+1}(12k+5)] = \frac{3^{2\gamma+2}+1}{8}\sum,$$

mais

$$\mathfrak{N}[2.3^{2\gamma}(12k-5)] = \frac{3^{2\gamma+1}+1}{8}\sum,$$

enfin

$$\mathfrak{N}[2.3^{2\gamma}(12k-1)] = \frac{3^{2\gamma+1}-1}{8}\sum,$$

où

$$\sum$$

se rapporte successivement aux entiers

$$12k+1, \quad 12k+5, \quad 12k-5, \quad 12k-1.$$

On admet, bien entendu, pour γ la valeur o comme les autres valeurs.

On exprime aisément que dans une forme proposée un entier t ou z doit être pair; il suffit de le remplacer par $2u$, u restant entier quelconque, et l'on aura ainsi une forme nouvelle à étudier. Comme on ne peut pas procéder de même pour les entiers impairs, du moins en s'en tenant aux formes homogènes, j'ai cru devoir entrer à leur sujet dans les détails qui précèdent.

SUR LA FORME

$$x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande le nombre

$$N(n = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2)$$

des représentations de n par la forme

$$x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2,$$

c'est-à-dire du nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers quelconques.

Cette question n'offre aucune difficulté quand n est un entier impair $4g + 3$ ou un entier impairement pair $2(2g + 1)$; car il est évident que dans ces deux cas on a

$$N(n = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2) = 0.$$

Le cas de n pairement pair, $n = 4g$, est facile aussi à traiter, car l'équation

$$4g = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2$$

exigeant que x soit pair, on n'a qu'à faire $x = 2u$ pour la ramener à celle-ci

$$g = u^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2,$$

qui a été discutée plus haut, dans ce cahier même.

2. Il ne reste plus que le cas de

$$n = 4g + 1.$$

Celui-là a ses difficultés propres. Néanmoins, dans ce cas même, nous arriverons au but en employant les fonctions

$$N(n),\ N_0(n)$$

qui représentent respectivement les valeurs connues de

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2)$$

et de

$$N_0(n = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2).$$

D'abord on posera l'équation

$$4(4g + 1) = i^2 + 3j^2,$$

où i et j sont des entiers impairs, et l'on formera la somme

$$\sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j,$$

que nous désignons, pour abréger, par σ. Ensuite on aura

$$N(4g + 1 = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2) = \frac{1}{6} N_0(4g + 1) + (-1)^g \sigma,$$

en employant la fonction $N_0(n)$, ou bien

$$N(4g + 1 = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2) = \frac{1}{12} N(4g + 1) + \left[\frac{1}{2} + (-1)^g\right] \sigma,$$

en employant la fonction $N(n)$.

3. Appliquons à quelques exemples l'expression

$$\frac{1}{6} N_0(4g + 1) + (-1)^g \sigma$$

du nombre demandé

$$N(4g+1 = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2).$$

Soit d'abord $g = 0$, d'où

$$4g + 1 = 1;$$

on a ici $\sigma = 1$, $N_0(1) = 6$; donc

$$N(1 = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2) = 2,$$

ce qui est exact.

Soit ensuite $g = 1$, d'où

$$4g + 1 = 5.$$

On a cette fois $\sigma = 0$, $N_0(5) = 24$; donc

$$N(5 = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2) = 4,$$

ce qui est exact aussi.

Prenons à présent $g = 2$, d'où

$$4g + 1 = 9.$$

On a pour ce cas $\sigma = -3$, $N_0(9) = 30$; donc

$$N(9 = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2) = 2,$$

ce qui s'accorde avec l'équation

$$9 = (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 12.0^2 + 16.0^2.$$

Soit encore $g = 3$, d'où

$$4g + 1 = 13.$$

On a dans ce cas $\sigma = -2$, $N_0(13) = 36$; donc

$$N(13 = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2) = 8.$$

Les équations

$$13 = (\pm 3)^2 + 4(\pm 1)^2 + 12.0^2 + 16.0^2$$

et

$$13 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 12(\pm 1)^2 + 16.0^2$$

confirment ce fait.

Pour $g = 4$, c'est-à-dire

$$4g + 1 = 17,$$

on a

$$\sigma = 0$$

et

$$N_0(17) = 96;$$

donc

$$N(17 = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2) = 16.$$

Cela est confirmé par les identités

$$17 = (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 12.0^2 + 16(\pm 1)^2,$$
$$17 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 12(\pm 1)^2 + 16.0^2,$$
$$17 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 2)^2 + 12.0^2 + 16.0^2.$$

Nous ne pousserons pas plus loin ces calculs; mais nous ferons observer que la forme qui nous occupe, et qui peut s'écrire

$$x^2 + (2y)^2 + (4t)^2 + 3(2z)^2,$$

dérive de la forme

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + 3T^2,$$

en n'y admettant pour Y et T que des entiers pairs et pour Z que des entiers pairement pairs. En exigeant pour Z une valeur pairement paire, nous sortons du cercle des questions traitées ci-dessus.

SUR LA FORME
$x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n, on demande le nombre des représentations de n par la forme

$$x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2,$$

c'est-à-dire le nombre

$$\mathrm{N}(n = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2)$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Comme on a

$$x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2 \equiv x^2 \pmod{3},$$

il est clair que la forme proposée ne peut représenter aucun nombre $\equiv 2 \pmod{3}$. On a donc d'abord

$$\mathrm{N}(3q + 2 = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2) = 0.$$

Le cas de n multiple de 3, ou de $n = 3q$, est facile aussi à traiter. En effet l'équation

$$3q = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2$$

exige que x soit divisible par 3. Je fais donc $x = 3x_1$; et en divisant

par 3, je vois que notre équation revient à celle-ci :

$$q = y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 3x_1^2.$$

En d'autres termes, la valeur de

$$N(3q = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2)$$

est égale à celle de

$$N(q = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2)$$

qui a été donnée dans le cahier d'avril (p. 129).

2. Le seul cas vraiment difficile est donc celui de

$$n = 3q + 1.$$

J'ai reconnu cependant que dans ce cas même la question dont nous nous occupons aujourd'hui peut être ramenée à une question déjà résolue. Je me suis assuré en effet que la valeur demandée de

$$N(3q + 1 = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2)$$

est précisément la moitié de celle de

$$N(3q + 1 = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2)$$

qui a été donnée aussi dans le cahier d'avril (p. 124).

D'après cela, si l'on considère d'abord un nombre impair $3q + 1$ ou plutôt $6l + 1$, et si l'on désigne par la simple lettre

$$\Sigma$$

la somme

$$\Sigma(-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier

$$6l + 1 = d\delta,$$

on aura

$$N(6l+1 = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2) = 2\sum.$$

Ainsi, pour l'entier 1, le nombre des représentations par la forme

$$x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2$$

est égal à 2, ce qui s'accorde avec l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6.0^2 + 6.0^2.$$

Pour l'entier 7, relativement auquel on a

$$\sum = 6,$$

ce nombre devient égal à 12 ; et c'est ce que confirment les identités

$$7 = (\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2 + 6.0^2,$$
$$7 = (\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2 + 6.0^2,$$
$$7 = (\pm 1)^2 + 3.0^2 + 6.0^2 + 6(\pm 1)^2.$$

Pour l'entier 13, on le trouverait égal à 28; et ainsi de suite.

3. Considérons à présent les entiers pairs

$$2^\alpha m$$

que la formule $3q+1$ peut fournir, ce qui suppose

$$m = 6l + 1$$

si $\alpha = 2\gamma$, mais

$$m = 6l - 1$$

si $\alpha = 2\gamma + 1$. Dans tous les cas, désignons par la simple lettre

$$\sum$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$.

En distinguant dans $6l + 1$ les deux formes

$$12k + 1, \quad 12k - 5,$$

nous aurons, dans l'hypothèse de $\gamma > 0$,

$$N(2^{2\gamma} m = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2) = 2(2^{2\gamma} - 1) \sum$$

pour

$$m = 12k + 1,$$

tandis que

$$N(2^{2\gamma} m = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2) = 2(2^{2\gamma} + 1) \sum$$

pour

$$m = 12k - 5.$$

En distinguant semblablement dans $6l - 1$ les deux formes

$$12k - 1, \quad 12k + 5,$$

on a

$$N(2^{2\gamma+1} m = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2) = 2(2^{2\gamma+1} - 1) \sum$$

pour

$$m = 12k - 1,$$

mais

$$N(2^{2\gamma+1} m = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2) = 2(2^{2\gamma+1} + 1) \sum$$

pour

$$m = 12k + 5.$$

On peut prendre $\gamma = 0$ dans ces deux dernières formules. Ainsi

$$N(2m = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2) = 2 \sum$$

pour

$$m = 12k - 1,$$

tandis que

$$\mathrm{N}(2m = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2) = 6\sum$$

pour

$$m = 12k + 5.$$

En faisant, par exemple, $m = 5$, d'où

$$\sum = 4,$$

on trouvera que l'entier 10 peut être représenté vingt-quatre fois par la forme

$$x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2;$$

les équations

$$10 = (\pm 2)^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2 + 6.0^2,$$
$$10 = (\pm 2)^2 + 3.0^2 + 6.0^2 + 6(\pm 1)^2,$$
$$10 = (\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6(\pm 1)^2 + 6.0^2,$$
$$10 = (\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2 + 6(\pm 1)^2$$

confirment ce fait.

SUR LA FORME
$2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n, on demande le nombre des représentations de n par la forme

$$2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2,$$

c'est-à-dire le nombre

$$\mathrm{N}(n = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

des solutions de l'équation

$$n = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Comme on a

$$2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2 \equiv 2x^2 \pmod{3},$$

il est clair que la forme proposée ne peut représenter aucun nombre $\equiv 1 \pmod{3}$. On a donc d'abord

$$\mathrm{N}(3q + 1 = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 0.$$

Le cas de n multiple de 3, ou de $n = 3q$, est facile aussi à traiter. En effet l'équation

$$3q = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2$$

exige que x soit divisible par 3. Je fais donc $x = 3x_1$; et en divisant

par 3, je vois que notre équation revient à celle-ci :

$$q = y^2 + z^2 + 2t^2 + 6x_1^2.$$

En d'autres termes, la valeur de

$$\mathrm{N}(3q = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

est égale à celle de

$$\mathrm{N}(q = x^2 + y^2 + 2z^2 + 6t^2)$$

qui a été donnée dans le cahier d'avril (p. 124).

2. Le seul cas vraiment difficile est donc celui de

$$n = 3q + 2.$$

J'ai reconnu cependant que dans ce cas même la question qui nous occupe actuellement peut être ramenée à une question déjà résolue. Je me suis assuré en effet que la valeur demandée de

$$\mathrm{N}(3q + 2 = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

est précisément la moitié de celle de

$$\mathrm{N}(3q + 2 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3t^2)$$

qui a été donnée aussi dans le cahier d'avril (p. 129).

D'après cela, si l'on considère d'abord un entier impair $3q + 2$, ou plutôt $6l - 1$, et si l'on désigne par la simple lettre

$$\Sigma$$

la somme

$$\Sigma(-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier

$$6l - 1 = d\delta,$$

on aura

$$N(6l-1=2x^2+3y^2+3z^2+6t^2)=2\sum.$$

Ainsi pour l'entier 5, le nombre des représentations par la forme

$$2x^2+3y^2+3z^2+6t^2$$

est égal à 8, ce qui s'accorde avec les identités

$$5=2(\pm 1)^2+3(\pm 1)^2+3.0^2+6.0^2$$

et

$$5=2(\pm 1)^2+3.0^2+3(\pm 1)^2+6.0^2.$$

5. Considérons à présent les entiers pairs

$$2^\alpha m$$

que la formule $3q+2$ peut fournir, ce qui suppose

$$m=6l-1$$

si $\alpha=2\gamma$, mais

$$m=6l+1$$

si $\alpha=2\gamma+1$. Dans tous les cas, désignons à notre ordinaire par la simple lettre

$$\Sigma$$

la somme

$$\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right)d$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier

$$m=d\delta.$$

En distinguant dans $6l-1$ les deux formes

$$12k-1,\quad 12k+5,$$

nous aurons, dans l'hypothèse de $\gamma > 0$,

$$N(2^{2\gamma}m = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 2(2^{2\gamma} - 1)\sum$$

pour

$$m = 12k - 1,$$

tandis que

$$N(2^{2\gamma}m = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 2(2^{2\gamma} + 1)\sum$$

pour

$$m = 12k + 5.$$

En distinguant semblablement dans $6l + 1$ les deux formes

$$12k + 1, \quad 12k - 5,$$

on a

$$N(2^{2\gamma+1}m = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 2(2^{2\gamma+1} - 1)\sum$$

pour

$$m = 12k + 1,$$

mais

$$N(2^{2\gamma+1}m = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 2(2^{2\gamma+1} + 1)\sum$$

pour

$$m = 12k - 5.$$

On peut prendre $\gamma = 0$ dans ces deux dernières formules. Ainsi

$$N(2m = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 2\sum$$

pour

$$m = 12k + 1,$$

tandis que

$$N(2m = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2) = 6\sum$$

pour

$$m = 12k - 5.$$

En faisant, par exemple, $m = 7$, d'où

$$\sum = 6,$$

on trouvera que l'entier 14 peut être représenté trente-six fois par la forme

$$2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2;$$

les équations

$$14 = 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 6.0^2,$$
$$14 = 2(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 3(\pm 2)^2 + 6.0^2,$$
$$14 = 2(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6(\pm 1)^2,$$
$$14 = 2(\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2,$$
$$14 = 2(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 3.0^2 + 6(\pm 1)^2$$

confirment ce fait.

SUR LA FORME
$x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n, on demande le nombre des représentations de n par la forme

$$x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2),$$

c'est-à-dire le nombre

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)]$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2),$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs. Cette question n'offrira aucune difficulté à ceux qui feront la remarque simple que les deux quantités

$$\mathrm{N}[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)]$$

et

$$\mathrm{N}(2n = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2)$$

sont égales entre elles. Parcourons cependant les divers cas qui peuvent se présenter.

Comme on a

$$x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2) \equiv x^2 \pmod{3},$$

il est clair que la forme proposée ne peut représenter aucun entier $\equiv 2 \pmod{3}$. En d'autres termes, on a

$$\mathrm{N}[3q + 2 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = 0.$$

Le cas de $n = 3q$ est facile aussi à traiter. En effet l'équation

$$3q = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

exige que x soit multiple de 3. Je fais donc $x = 3x_1$, et en divisant par 3, j'ai

$$q = y^2 + z^2 + t^2 + 3x_1^2.$$

Il suit de là que la valeur de

$$N[3q = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)]$$

est égale à celle de

$$N(q = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2)$$

qui a été donnée dans le cahier d'avril (p. 105).

Soit

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant un entier impair, non divisible par 3. Si l'on a

$$\beta > 0,$$

la valeur de

$$N[2^\alpha 3^\beta m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)]$$

sera, d'après ce qu'on vient de dire,

$$\left[3^\beta + (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{m}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+1} - (-1)^{\alpha+\beta+\frac{m-1}{2}}\right]\Sigma,$$

en représentant par la simple lettre

$$\Sigma$$

la somme

$$\Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right)d.$$

relative aux groupes de diviseurs conjugués d, δ de l'entier

$$m = d\delta.$$

2. Il est digne de remarque que cette expression reste exacte en y supposant $\beta = 0$. Elle conduit alors, comme il le faut, à une valeur nulle quand l'entier n ou $2^\alpha m$ est de la forme $3q + 2$; et voici ce qu'elle donne quand $2^\alpha m = 3q + 1$, ce qui suppose

$$m = 6l + 1$$

si $\alpha = 2\gamma$, mais

$$m = 6l - 1$$

si $\alpha = 2\gamma + 1$.

Soit d'abord

$$m = 6l + 1,$$

ce qui répond aux cas distincts de

$$m = 12k + 1$$

et de

$$m = 12k - 5.$$

On a

$$\mathrm{N}\left[2^{2\gamma} m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)\right] = 2\left(2^{2\gamma+1} - 1\right)\sum$$

quand

$$m = 12k + 1,$$

tandis que

$$\mathrm{N}\left[2^{2\gamma} m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)\right] = 2\left(2^{2\gamma+1} + 1\right)\sum$$

quand

$$m = 12k - 5.$$

On peut prendre $\gamma = 0$ dans ces deux formules. Ainsi

$$\mathrm{N}\left[m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)\right] = 2\sum$$

pour $m = 12k + 1$, mais

$$\mathrm{N}\left[m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)\right] = 6\sum.$$

pour $m = 12k - 5$.

Soit, par exemple, $m = 1$. Il nous viendra

$$N[1 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = 2,$$

ce qui s'accorde avec l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 3(0^2 + 0^2 + 0^2)$$

qui donne pour l'entier 1 deux représentations.

Soit encore $m = 7$, d'où

$$\sum = 6.$$

Nous aurons

$$N[7 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = 36.$$

Or les identités

$$\begin{aligned}
7 &= (\pm 2)^2 + 3[(\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2],\\
7 &= (\pm 2)^2 + 3[0^2 + (\pm 1)^2 + 0^2],\\
7 &= (\pm 2)^2 + 3[0^2 + 0^2 + (\pm 1)^2],\\
7 &= (\pm 1)^2 + 3[(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2],\\
7 &= (\pm 1)^2 + 3[(\pm 1)^2 + 0^2 + (\pm 1)^2],\\
7 &= (\pm 1)^2 + 3[(0^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2]
\end{aligned}$$

fournissent effectivement pour l'entier 7 trente-six représentations.

5. Soit à présent

$$m = 6l - 1,$$

ce qui comprend les deux cas distincts de

$$m = 12k - 1$$

et de

$$m = 12k + 5.$$

Je trouve que l'on a

$$N[2^{2\gamma+1}m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = 2(2^{2\gamma+2} - 1)\sum$$

quand

$$m = 12k - 1,$$

tandis que

$$N\left[2^{2\gamma+1} m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)\right] = 2\left(2^{2\gamma+2} + 1\right) \sum$$

quand

$$m = 12k + 5.$$

On peut prendre $\gamma = 0$ dans ces deux formules. Ainsi

$$N\left[2m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)\right] = 6 \sum$$

pour $m = 12k - 1$, tandis que

$$N\left[2m = x^2 + 3[y^2 + z^2 + t^2)\right] = 10 \sum$$

pour $m = 12k + 5$.

Soit, par exemple, $m = 5$: il nous viendra

$$N\left[10 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)\right] = 10.4 = 40.$$

Or l'entier 10 peut en effet être représenté de quarante manières par la forme

$$x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2);$$

c'est ce que prouvent les équations

$$10 = (\pm 1)^2 + 3\left[(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2\right],$$
$$10 = (\pm 2)^2 + 3\left[(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2\right],$$
$$10 = (\pm 2)^2 + 3\left[(\pm 1)^2 + 0^2 + (\pm 1)^2\right],$$
$$10 = (\pm 2)^2 + 3\left[(0^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2\right].$$

Pour $m = 11$, on obtiendrait

$$N\left[22 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)\right] = 6 \times 12 = 72;$$

or cela s'accorde avec les équations

$$22 = 2^2 + 3(2^2 + 1^2 + 1^2)$$

et

$$22 = 4^2 + 3(1^2 + 1^2 + 0^2),$$

qui fourniront pour l'entier 22 soixante-douze représentations si l'on a soin d'y affecter du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et d'y opérer les permutations convenables.

4. Les solutions de l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

se divisent en deux classes suivant que $z^2 + t^2$ est un entier pair ou un entier impair. Il n'est pas inutile d'avertir que l'on peut déterminer séparément le nombre des solutions de la première classe et le nombre des solutions de la seconde classe. Le total est connu; il me suffira donc de dire que le nombre des solutions de la première classe ($z^2 + t^2$ entier pair) est égal à

$$\mathrm{N}\,[n = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2]:$$

la démonstration est facile. Or la valeur de

$$\mathrm{N}\,[n = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2]$$

a été donnée plus haut, dans ce cahier même.

SUR LA FORME

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2);$$

Par M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n, on demande le nombre des représentations de n par la forme

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2),$$

c'est-à-dire le nombre

$$\mathrm{N}\,[n = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2)]$$

des solutions de l'équation indéterminée

$$n = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2),$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Nous avons enseigné quelques pages plus haut, dans ce cahier même, à calculer le nombre des représentations d'un entier donné, par la forme

$$x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2.$$

Nous répondrons donc complétement et de la manière la plus courte à la question qui nous est posée ici en disant que la valeur de

$$\mathrm{N}\,[n = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2)]$$

et celle de

$$\mathrm{N}\,(2n = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2)$$

sont égales entre elles.

2. On a

$$\mathrm{N}\,(2n = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2) = 0$$

quand n est de la forme $3q+1$, parce qu'alors $2n$ est $\equiv 2 \pmod{3}$. Il suit de là que

$$N[3q+1 = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2+t^2)] = 0.$$

Mais pour $n = 3q$ et pour $n = 3q+2$ on trouvera des nombres plus ou moins grands de représentations.

Pour $n = 2$, on a

$$N(4 = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2) = 6,$$

comme le prouvent les équations

$$4 = (\pm 2)^2 + 3.0^2 + 6.0^2 + 6.0^2$$

et

$$4 = (\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 6.0^2 + 6.0^2.$$

L'entier 2 doit donc être représenté six fois par la forme

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2+t^2).$$

Voici les valeurs de x, y, z, t pour ces six représentations :

$$\begin{array}{llll}
x=1, & y=0, & z=0, & t=0, \\
x=-1, & y=0, & z=0, & t=0, \\
x=0, & y=1, & z=0, & t=0, \\
x=0, & y=-1, & z=0, & t=0, \\
x=1, & y=-1, & z=0, & t=0, \\
x=-1, & y=1, & z=0, & t=0.
\end{array}$$

Pour $n = 3$, on trouve

$$N[3 = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2+t^2)] = 4,$$

et ainsi de suite. Mais je n'insiste pas sur ces détails.

SUR LA FORME

$$x^2 + xy + y^2 + 3(z^2 + t^2);$$

Par M. J. LIOUVILLE.

---

1. La détermination du nombre

$$N[n = x^2 + xy + y^2 + 3(z^2 + t^2)]$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + xy + y^2 + 3(z^2 + t^2),$$

ne peut nous offrir à présent aucune difficulté; car il est pour ainsi dire évident que les valeurs de

$$N[n = x^2 + xy + y^2 + 3(z^2 + t^2)]$$

et de

$$N[2n = 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 3(z^2 + t^2)]$$

sont égales entre elles. Or nous venons précisément de donner le moyen de calculer dans tous les cas la seconde de ces deux valeurs.

On peut aussi revenir directement à la forme

$$x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2$$

en prouvant, comme il est aisé de le faire, l'égalité des deux quantités

$$N[n = x^2 + xy + y^2 + 3(z^2 + t^2)]$$

et

$$N(4n = x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 6t^2).$$

Tout cela est trop facile pour que je m'y arrête.

2. Je me contenterai du seul exemple de $n = 1$, pour lequel nos formules donnent

$$N[1 = x^2 + xy + y^2 + 3(z^2 + t^2)] = 6;$$

or je trouve en effet six représentations de l'entier 1 par la forme

$$x^2 + xy + y^2 + 3(z^2 + t^2).$$

Pour ces six représentations, on a

$$z = 0, \quad t = 0,$$

et les groupes de valeurs conjuguées de x, y sont

$$x = \pm 1, \quad y = 0,$$

puis

$$x = 0, \quad y = \pm 1,$$

enfin

$$x = 1, \quad y = -1$$

et

$$x = -1, \quad y = 1.$$

SUR LA FORME
$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier n, on demande le nombre des représentations de n par la forme

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2,$$

c'est-à-dire le nombre

$$\mathrm{N}(n = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2)$$

des solutions de l'équation

$$n = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

La réponse à cette question est bien facile quand l'entier donné n est de la forme $3q + 2$; car on a évidemment

$$\mathrm{N}(3q + 2 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 0.$$

Il est facile aussi de traiter le cas de $n = 3q$. En effet l'équation

$$3q = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2$$

exige évidemment que t soit divisible par 3. Je fais donc $t = 3u$, et en divisant par 3, je vois que notre équation équivaut à celle-ci :

$$q = x^2 + y^2 + z^2 + 12u^2.$$

En d'autres termes, le nombre demandé

$$\mathrm{N}(3q = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2)$$

équivaut à celui-ci

$$N(q = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2)$$

que nous avons déterminé dans le cahier de mai (p. 161), où nous le désignons plus simplement par

$$N_0(q).$$

Nous écrirons en conséquence

$$N(3q = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = N_0(q).$$

2. Reste le cas de $n = 3q + 1$. Celui-là seul offre des difficultés spéciales. Néanmoins, dans ce cas même, nous réussirons à ramener la question proposée à une question déjà résolue.

Considérons d'abord les entiers impairs n de la forme $3q + 1$, c'est-à-dire soit

$$n = 6l + 1.$$

Il faut alors poser de toutes les manières possibles l'équation

$$4(6l + 1) = i^2 + 3j^2$$

où i et j sont des entiers impairs positifs, puis former la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

relative aux diverses valeurs de i. Cette somme, que nous désignerons par la simple lettre τ, sera un des éléments de notre calcul. On la retranchera de la moitié du nombre des solutions de l'équation

$$6l + 1 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

dont nous nous sommes occupés plus haut, dans ce cahier même, et l'on obtiendra ainsi la valeur de

$$N(6l + 1 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2),$$

savoir

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{N}\,[6l+1 = x^2 + 3(y^2+z^2+t^2)] - \tau.$$

En désignant donc par

$$\sum$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d,$$

relative aux groupes de diviseurs conjugués d, δ de l'entier

$$6l+1 = d\delta,$$

on aura

$$\mathrm{N}\,(6l+1 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = \sum - \tau$$

quand l est pair, c'est-à-dire quand

$$6l+1 = 12k+1,$$

mais

$$\mathrm{N}\,(6l+1 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 3\sum - \tau$$

quand l est impair, c'est-à-dire quand

$$6l+1 = 12k-5.$$

Pour $l = 0$, par exemple, il viendra

$$\mathrm{N}\,(1 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 1 - 1 = 0,$$

ce qui est évident à priori.

Pour $l = 1$, $6l+1 = 7$, on a

$$\sum = 6;$$

les équations

$$4.7 = 1^2 + 3.3^2$$

et

$$4.7 = 5^2 + 3.1^2$$

donnent d'ailleurs

$$\tau = 6.$$

Il vient donc

$$N(7 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 3.6 - 6 = 12;$$

c'est ce que confirment les identités

$$7 = 3(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 3.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$7 = 3.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$7 = 3.0^2 + 3.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$

qui fournissent pour l'entier 7 douze représentations par la forme qui nous occupe.

5. Passons aux entiers pairs de la forme $3q + 1$, et d'abord aux entiers impairement pairs,

$$2(6l - 1).$$

Je ramène la recherche de

$$N[2(6l - 1) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2]$$

à celle de

$$N(6l - 1 = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2).$$

La valeur de cette dernière expression a été donnée plus haut, dans ce cahier même, et il suffit de la tripler pour avoir celle que nous cherchons. En d'autres termes, on a

$$N[2(6l - 1) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2] = 6\sum,$$

la simple lettre

$$\sum$$

représentant la somme

$$\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right)d,$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $6l - 1 = d\delta$.

Ainsi, par exemple, on doit avoir

$$N(10 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 24;$$

et cela est confirmé par les équations

$$10 = 3(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$10 = 3(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$10 = 3.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,$$

dont chacune fournit pour l'entier 10 huit représentations.

De même, on doit avoir

$$N(22 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 72;$$

c'est ce qu'on vérifiera sans peine au moyen des identités

$$22 = 3.2^2 + 3.1^2 + 3.1^2 + 4.1^2$$

et

$$22 = 3.1^2 + 3.1^2 + 3.0^2 + 4.2^2,$$

en y affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables.

4. Les entiers pairement pairs de la forme $3q + 1$ peuvent être représentés, sous la condition de $\alpha > 1$, par

$$2^\alpha m,$$

m étant un entier de la forme $6l + 1$ quand l'exposant α est pair, et de la forme $6l - 1$ quand l'exposant α est impair. Cela étant, pour avoir

$$N(2^\alpha m = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2),$$

on n'aura qu'à chercher

$$N[2^{\alpha-2} m = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)];$$

il est évident que ces deux quantités sont égales entre elles, et la seconde a été donnée plus haut, dans ce cahier même.

D'après cela, si l'on désigne par

$$\sum$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$, on aura

$$N\left(2^{2\gamma+2} m = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2\right) = 2\left(2^{2\gamma+1} - 1\right) \sum$$

si

$$m = 12k + 1,$$

mais

$$N\left(2^{2\gamma+2} m = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2\right) = 2\left(2^{2\gamma+1} + 1\right) \sum$$

si

$$m = 12k - 5,$$

puis

$$N\left(2^{2\gamma+3} m = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2\right) = 2\left(2^{2\gamma+2} - 1\right) \sum$$

quand

$$m = 12k - 1,$$

enfin

$$N\left(2^{2\gamma+3} m = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2\right) = 2\left(2^{2\gamma+2} + 1\right) \sum,$$

quand

$$m = 12k + 5.$$

On admet pour γ la valeur 0, comme toute autre valeur > 0.

La première de ces quatre formules donne

$$N\left(4 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2\right) = 2,$$

ce qui est exact, vu l'équation

$$4 = 3.0^2 + 3.0^2 + 3.0^2 + 4(\pm 1)^2.$$

D'après la seconde,

$$N(28 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 36,$$

ce qu'on vérifie aisément au moyen des deux identités

$$28 = 3.2^2 + 3.2^2 + 3.0^2 + 4.1^2,$$
$$28 = 3.2^2 + 3.0^2 + 3.0^2 + 4.2^2,$$

en y affectant du double signe $\pm$ les racines des carrés qui ne sont pas nuls et en opérant les permutations convenables.

D'après la troisième formule,

$$N(88 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 72;$$

la vérification se fait facilement au moyen des deux identités

$$88 = 3.4^2 + 3.2^2 + 3.2^2 + 4.2^2,$$
$$88 = 3.2^2 + 3.2^2 + 3.0^2 + 4.4^2.$$

Enfin la quatrième formule donne

$$N(40 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2) = 40;$$

et les équations

$$40 = 3(\pm 2)^2 + 3(\pm 2)^2 + 3(\pm 2)^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$40 = 3(\pm 2)^2 + 3(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 4(\pm 2)^2,$$
$$40 = 3(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 3(\pm 2)^2 + 4(\pm 2)^2,$$
$$40 = 3.0^2 + 3(\pm 2)^2 + 3(\pm 2)^2 + 4(\pm 2)^2$$

confirment ce fait.

5. En traitant de la forme

$$x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2),$$

nous avons déterminé non-seulement le nombre total

$$N[n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)]$$

des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2),$$

mais encore séparément le nombre des solutions pour lesquelles $z^2 + t^2$ est un entier pair, d'où résulte par soustraction le nombre des solutions pour lesquelles $z^2 + t^2$ est un entier impair. On en conclut facilement aussi les nombres relatifs à $x^2 + 3y^2$ entier pair et à $x^2 + 3y^2$ entier impair; car $x^2 + 3y^2$ et $z^2 + t^2$ sont de même espèce (mod. 2) si l'entier donné n est pair, et d'espèce opposée si n est impair, de sorte que quand on fixe la valeur de $x^2 + 3y^2$ (mod. 2), on fixe par cela même celle de $z^2 + t^2$, et *vice versâ*.

Déterminer, comme nous venons de le faire, la valeur de

$$\mathrm{N}(n = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2),$$

c'est évidemment déterminer celle du nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

pour lesquelles x est pair, et en retranchant ce nombre du total des solutions nous en déduirons le nombre de celles pour lesquelles x est impair.

Dans l'article suivant, nous nous occuperons de la forme

$$3x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2;$$

par là nous arriverons à obtenir séparément aussi le nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

pour lesquelles x et y sont pairs à la fois, et dès lors on pourra *mutatis mutandis* appliquer à la forme

$$x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

ce que nous avons dit concernant la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$, dans nos *Remarques nouvelles* insérées au cahier de juin. En un mot, on

peut trouver pour un entier quelconque n le nombre des solutions dont l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

est susceptible quand on admet des valeurs données d'espèce, relativement au module 2, pour une ou pour plusieurs des quatre indéterminées x, y, z, t.

6. Par exemple, il est intéressant de connaître l'expression très-simple du nombre des solutions que l'équation

$$n = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

comporte en n'y prenant pour x, y, z, t que des entiers impairs et positifs. Je laisse de côté le cas de $n = 3q$, qui ne nous apprendrait rien de nouveau. Dès lors n devant être à la fois $\equiv 1$ (mod. 3) et $\equiv 2$ (mod. 8) ne pourra être que de la forme $24k + 10$. Soit donc

$$n = 24k + 10,$$

et qu'il s'agisse de trouver le nombre

$$\mathfrak{N}[24k + 10 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)]$$

des solutions dont l'équation

$$24k + 10 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)$$

jouit en n'y prenant pour x, y, z, t que des entiers impairs positifs. Or notre analyse conduit à la formule

$$\mathfrak{N}[24k + 10 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = \frac{1}{4}\sum(-1)^{\frac{\delta - 1}{2}}\left(\frac{\delta}{3}\right)d,$$

où le signe sommatoire s'applique aux groupes de diviseurs conjugués d, δ de l'entier $12k + 5 = d\delta$ dont $24k + 10$ est le double.

Ainsi, on a

$$\mathfrak{N}[10 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = 1,$$

ce qui s'accorde avec l'équation

$$10 = 1^2 + 3(1^2 + 1^2 + 1^2).$$

On a ensuite

$$\mathfrak{N}[34 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = 4;$$

et cela est vérifié par les équations

$$34 = 1^2 + 3(3^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$34 = 1^2 + 3(1^2 + 1^2 + 3^2),$$
$$34 = 1^2 + 3(1^2 + 3^2 + 1^2),$$
$$34 = 5^2 + 3(1^2 + 1^2 + 1^2),$$

On a de même

$$\mathfrak{N}[58 = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)] = 7,$$

résultat confirmé par les identités

$$58 = 1^2 + 3(3^2 + 3^2 + 1^2),$$
$$58 = 1^2 + 3(3^2 + 1^2 + 3^2),$$
$$58 = 1^2 + 3(1^2 + 3^2 + 3^2),$$
$$58 = 5^2 + 3(3^2 + 1^2 + 1^2),$$
$$58 = 5^2 + 3(1^2 + 3^2 + 1^2),$$
$$58 = 5^2 + 3(1^2 + 1^2 + 3^2),$$
$$58 = 7^2 + 3(1^2 + 1^2 + 1^2).$$

Je ne pousserai pas plus loin ces calculs.

SUR LA FORME

$$3x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2;$$

Par M. J. LIOUVILLE.

---

1. La détermination du nombre

$$N(n = 3x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2)$$

des solutions de l'équation

$$n = 3x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2,$$

où n est un entier donné, ne peut offrir aucune difficulté, ni quand n est de la forme $3q + 2$, ce nombre étant évidemment nul alors, ni quand $n = 3q$, attendu que l'équation

$$3q = 3x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2$$

exigeant que z soit un multiple de 3, $z = 3z_1$, revient à celle-ci

$$q = x^2 + y^2 + 4t^2 + 12z_1^2,$$

que nous avons discutée dans le cahier de mai (p. 173).

2. Pour un entier pair, $n = 2q$, la question se résout facilement aussi, en prouvant que le nombre demandé

$$N(2q = 3x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2)$$

est égal à cet autre nombre

$$N(q = 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6t^2),$$

que nous avons enseigné à calculer, pour chaque entier q, dans ce cahier même.

Reste le cas de n impair et de la forme $3q+1$. On peut avoir

$$n = 12k + 1$$

ou

$$n = 12k - 5.$$

Or il est visible que

$$N(12k + 1 = 3x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2) = 0,$$

et l'on s'assure sans peine que la valeur de

$$N(12k - 5 = 3x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2)$$

est les deux tiers de celle de

$$N(12k - 5 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4t^2)$$

que nous venons de déterminer dans l'article précédent.

SUR LA FORME
$3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre

$$N(n = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2,$$

ne peut nous offrir aucune difficulté quand cet entier est pair. D'abord, s'il est impairement pair, l'équation

$$n = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2$$

est évidemment impossible, de façon qu'on a dans ce cas

$$N(n = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2) = 0.$$

Soit ensuite n pairement pair, $n = 4q$. L'équation

$$4q = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2$$

ne peut avoir lieu qu'en prenant x pair, $x = 2x_1$; elle revient donc à celle-ci

$$q = y^2 + 3z^2 + 3t^2 + 3x_1^2.$$

En d'autres termes la valeur de

$$N(4q = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2)$$

est égale à celle de

$$N[q = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)],$$

qui a été donnée dans le cahier de juillet (p. 219).

2. Pour n impair, la question n'est pas moins facile. D'abord on a évidemment

$$N(n = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2) = 0$$

quand

$$n = 4g + 1.$$

Reste le cas de

$$n = 4g + 3,$$

et celui-là sera résolu, ou du moins sera ramené à une question déjà résolue, si l'on observe que le nombre demandé

$$N(4g + 3 = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2)$$

est la moitié de

$$N(4g + 3 = 3x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2),$$

sur quoi voyez les dernières pages du cahier de juillet.

SUR LA FORME
$x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande le nombre

$$N(n = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2.$$

Pour répondre à cette question, nous remarquerons d'abord que l'on a évidemment

$$N(3q + 2 = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2) = 0.$$

On voit aussi que la valeur de

$$N(3q = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2)$$

est égale à celle de

$$N(q = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4t^2)$$

que nous avons déterminée dans le cahier de juin (p. 182).

Le cas de

$$n = 3q + 1$$

est donc le seul qui reste à examiner.

2. Les entiers impairs de la forme $3q + 1$ se divisent en deux classes. On peut avoir

$$n = 12k + 1$$

ou

$$n = 12k - 5.$$

Qu'il s'agisse de l'un ou de l'autre de ces deux cas, nous aurons à introduire la fonction

$$\sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d,$$

relative aux groupes de diviseurs conjugués d, δ de l'entier $n = d\delta$. Nous la représenterons, pour abréger, par la simple lettre

$$\sum.$$

Nous aurons à considérer aussi la fonction

$$\sigma = \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j,$$

où le signe sommatoire porte sur les entiers impairs et positifs qui peuvent appartenir à l'équation

$$4n = i^2 + 3j^2,$$

dans laquelle l'entier i est aussi impair et positif.

Cela étant, je trouve que

$$\mathrm{N}(n = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2) = \sum + \sigma$$

quand

$$n = 12k + 1;$$

mais

$$\mathrm{N}(n = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2) = 3\sum + \sigma$$

quand

$$n = 12k - 5.$$

Ainsi, pour $n = 1$, le nombre des représentations est

$$1 + 1 = 2;$$

et cela s'accorde avec l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 3.0^2 + 3.0^2 + 12.0^2.$$

Pour $n = 13 = 12 + 1$, on a

$$\sum = 14$$

et

$$\sigma = -2.$$

Il doit donc y avoir douze représentations. Les équations

$$13 = (\pm 1)^2 + 3(\pm 2)^2 + 3.0^2 + 12.0^2,$$
$$13 = (\pm 1)^2 + 3.0^2 + 3(\pm 2)^2 + 12.0^2,$$
$$13 = (\pm 1)^2 + 3.0^2 + 3.0^2 + 12(\pm 1)^2$$

confirment ce fait.

Parmi les entiers $12k - 5$, prenons $n = 7$. On a alors

$$\sum = 6$$

et

$$\sigma = -2.$$

Le nombre des représentations est donc cette fois

$$3.6 - 2 = 16.$$

On vérifie qu'il en est ainsi au moyen des identités

$$7 = (\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 12.0^2,$$
$$7 = (\pm 2)^2 + 3.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 12.0^2,$$
$$7 = (\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 12.0^2.$$

5. Passons aux entiers pairs de la forme $3q + 1$. On peut les représenter par $2^\alpha m$, m étant un entier de la forme $6l + 1$ quand α est pair, mais de la forme $6l - 1$ quand α est impair. Nous désignerons toujours par

$$\sum$$

la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d,$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$.

Pour $\alpha = 1$, on doit avoir $m = 6l - 1$, c'est-à-dire

$$n = 2(6l - 1);$$

et, dans cette hypothèse, je trouve

$$\mathrm{N}(n = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2) = 2\sum.$$

Ainsi, pour $m = 5$, d'où $n = 10$, on doit avoir huit représentations. L'équation

$$10 = (\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 12.0^2$$

confirme ce fait.

Pour $m = 11$, on a $n = 22$; et l'on doit trouver vingt-quatre représentations. Elles sont fournies en effet par les équations que voici :

$$22 = (\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 12(\pm 1)^2,$$
$$22 = (\pm 4)^2 + 3(\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 12.0^2.$$

Quand il s'agit des multiples de 4, nous avons à distinguer les deux cas de

$$n = 2^{2\gamma+2} m$$

et de

$$n = 2^{2\gamma+3} m,$$

γ pouvant se réduire à zéro. Dans le premier cas, m doit être de l'une des deux formes

$$12k + 1, \quad 12k - 5.$$

Dans le second cas, m doit être de l'une des deux formes

$$12k + 5, \quad 12k - 1.$$

Or je trouve d'une part

$$N\left(2^{2\gamma+2}m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2\right) = 2\left(3.2^{2\gamma+1} - 1\right)\sum$$

quand

$$m = 12k + 1,$$

mais

$$N\left(2^{2\gamma+2}m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2\right) = 2\left(3.2^{2\gamma+1} + 1\right)\sum$$

quand

$$m = 12k - 5;$$

et d'autre part j'obtiens

$$N\left(2^{2\gamma+3}m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2\right) = 2\left(3.2^{2\gamma+2} + 1\right)\sum$$

quand

$$m = 12k + 5,$$

mais

$$N\left(2^{2\gamma+3}m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2\right) = 2\left(3.2^{2\gamma+2} - 1\right)\sum$$

quand

$$m = 12k - 1.$$

En prenant $\gamma = 0$, on a les formules particulières que voici :

$$N\left(4m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2\right) = 10\sum$$

pour

$$m = 12k + 1;$$

mais

$$N\left(4m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2\right) = 14\sum$$

pour

$$m = 12k - 5.$$

Puis

$$N\left(8m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2\right) = 26\sum$$

pour

$$m = 12k + 5;$$

enfin

$$N(8m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2) = 22 \sum$$

pour

$$m = 12k - 1.$$

La première de ces formules particulières, en y faisant $m = 1$, donne

$$N(4 = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2) = 10,$$

ce qui est vérifié par les identités

$$4 = (\pm 2)^2 + 3.0^2 + 3.0^2 + 12.0^2,$$
$$4 = (\pm 1)^2 + 3(\pm 1)^2 + 3.0^2 + 12.0^2,$$
$$4 = (\pm 1)^2 + 3.0^2 + 3(\pm 1)^2 + 12.0^2.$$

Je me contenterai de ce seul exemple.

SUR LA FORME

$$x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Le nombre

$$N(n = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2,$$

est évidemment nul quand

$$n = 3q + 2.$$

Le cas de

$$n = 3q$$

est facile aussi à traiter, la valeur de

$$N(3q = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2)$$

étant égale à celle de

$$N(q = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2)$$

qui a été donnée dans le cahier de juin (p. 185).

Nous n'avons donc à étudier que le cas de

$$n = 3q + 1.$$

2. Commençons par les entiers impairs $n = 3q + 1$, ou plutôt

$$n = 6l + 1.$$

J'arrive pour eux à la formule

$$N(n = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2) = \sum + \sigma,$$

où

$$\sum$$

représente la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $n = d\delta$, tandis que

$$\sigma$$

désigne la somme

$$\sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j$$

qui concerne l'équation

$$4n = i^2 + 3j^2$$

où les entiers i et j sont impairs et positifs.

Ainsi, pour $n = 1$, on aura deux représentations : elles sont fournies par l'équation

$$1 = (\pm 1)^2 + 3.0^2 + 12.0^2 + 12.0^2.$$

Pour $n = 7$, le nombre des représentations sera

$$6 - 2 = 4;$$

l'équation

$$7 = (\pm 2)^2 + 3(\pm 1)^2 + 12.0^2 + 12.0^2$$

confirme ce fait.

3. Le cas d'un nombre impairement pair ne donne lieu à aucune difficulté; on a évidemment alors

$$N(n = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2) = 0.$$

Il ne reste donc plus que les entiers pairement pairs (de la forme

$3q+1$ bien entendu) lesquels se divisent en quatre classes, savoir

$$n = 2^{2\gamma+2} m$$

avec

$$m = 12k+1 \quad \text{ou} \quad 12k-5,$$

et

$$n = 2^{2\gamma+3} m$$

avec

$$m = 12k+5 \quad \text{ou} \quad 12k-1.$$

De quelque classe qu'il s'agisse, nous représenterons par la simple lettre

$$\Sigma$$

la somme

$$\Sigma (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d,$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$.

Je trouve d'une part

$$\mathrm{N}\left(2^{2\gamma+2} m = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2\right) = 2\left(2^{2\gamma+2} - 1\right)\Sigma$$

quand

$$m = 12k+1,$$

mais

$$\mathrm{N}\left(2^{2\gamma+2} m = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2\right) = 2\left(2^{2\gamma+2} + 1\right)\Sigma$$

quand

$$m = 12k-5.$$

D'autre part

$$\mathrm{N}\left(2^{2\gamma+3} m = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2\right) = 2\left(2^{2\gamma+3} + 1\right)\Sigma$$

quand

$$m = 12k+5,$$

et

$$N\left(2^{2\gamma+3}m = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2\right) = 2\left(2^{2\gamma+3} - 1\right)\sum$$

quand

$$m = 12k - 1.$$

On peut prendre $\gamma = 0$ dans ces formules. Il vient ainsi

$$N\left(4m = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2\right) = 6\sum$$

quand

$$m = 12k + 1,$$

mais

$$N\left(4m = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2\right) = 10\sum$$

quand

$$m = 12k - 5;$$

puis

$$N\left(8m = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2\right) = 18\sum$$

quand

$$m = 12k + 5,$$

enfin

$$N\left(8m = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2\right) = 14\sum$$

quand

$$m = 12k - 1.$$

SUR LA FORME
$x^2 + 12y^2 + 12z^2 + 12t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre

$$N(n = x^2 + 12y^2 + 12z^2 + 12t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + 12y^2 + 12z^2 + 12t^2,$$

est facile à présent. On a évidemment

$$N(n = x^2 + 12y^2 + 12z^2 + 12t^2) = 0$$

quand n est de la forme $4q + 3$ ou de la forme $3q + 2$, et aussi quand l'entier n est impairement pair. Pour $n = 4q$, il suffit d'observer que la valeur de

$$N(4q = x^2 + 12y^2 + 12z^2 + 12t^2)$$

est égale à celle de

$$N[q = x^2 + 3(y^2 + z^2 + t^2)]$$

qui a été donnée dans le cahier de juillet (p. 219). Pour $n = 3q$, on remontera au cahier de juin (p. 179); car la valeur de

$$N(3q = x^2 + 12y^2 + 12z^2 + 12t^2)$$

est égale à celle de

$$N(q = 3x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2).$$

2. Le cas de $n = 12k + 1$ reste donc seul à examiner; et pour arriver dans ce cas au but, on remarquera que le nombre demandé

$$N(12k + 1 = x^2 + 12y^2 + 12z^2 + 12t^2)$$

est égal à celui-ci

$$N(12k + 1 = x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 12t^2)$$

dont la valeur a été donnée dans l'article précédent; cette valeur est

$$\sum + \sigma,$$

ou

$$\sum, \quad \sigma$$

désignent respectivement les sommes

$$\sum (-1)^{\frac{\delta - 1}{2}} \left(\frac{\delta}{3}\right) d, \quad \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j,$$

relatives d'une part aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier

$$12k + 1 = d\delta,$$

d'autre part aux entiers impairs et positifs j que comporte l'équation

$$4(12k + 1) = i^2 + 3j^2,$$

dans laquelle i est aussi impair et positif.

SUR LA FORME

$3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 48t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre

$$N(n = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 48t^2)$$

des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 48t^2,$$

n'offre aucune difficulté quand cet entier est impair et $\equiv 1 \pmod{4}$, ou quand il est impairement pair, ou enfin quand il est $\equiv 2 \pmod{3}$; car on a alors évidemment

$$N(n = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 48t^2) = 0.$$

On voit tout de suite aussi que la valeur de

$$N(4q = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 48t^2)$$

est égale à celle de

$$N(q = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 12t^2)$$

qui a été donnée plus haut, dans ce cahier même. Enfin la valeur de

$$N(3q = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 48t^2)$$

est égale à celle de

$$N(q = x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 16t^2)$$

qui a été donnée dans le cahier de juin (p. 205).

2. Nous n'avons donc à nous occuper que du cas de n impair $\equiv 3 \pmod{4}$ et $\equiv 1 \pmod{3}$, c'est-à-dire du cas de

$$n = 12k - 5.$$

Ce cas exige une étude spéciale; mais enfin on arrive au but. Dans les premières pages de ce cahier, nous avons en effet donné la valeur de

$$N(12k - 5 = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 12t^2).$$

Or, si l'on en prend la moitié, et qu'on y ajoute ou qu'on en retranche (suivant que k est pair ou impair) la somme

$$\sigma = \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j$$

relative à l'équation

$$4(12k - 5) = i^2 + 3j^2$$

où i et j sont des entiers impairs positifs, on aura précisément la valeur demandée de

$$N(12k - 5 = 3x^2 + 4y^2 + 12z^2 + 48t^2).$$

La question proposée est ainsi complétement résolue.

MÉMOIRE

Sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope;

PAR M. DE SAINT-VENANT.

Présenté à l'Académie des Sciences le 16 mars 1863 [*].

PREMIER ARTICLE.

§ Ier. — *Objet.*

1. *Exposition.* — L'élasticité d'un corps solide, ou l'intensité plus ou moins grande de la résistance qu'il oppose à la continuation des dilatations ou déformations supposées très-petites qu'on lui fait subir en divers sens à partir de son état dit *naturel* (où il n'y a encore aucune *pression* à son intérieur ni sur sa surface), dépend, en chaque point, d'un certain nombre de constantes ou de *coefficients* qu'un raisonnement péremptoire de George Green a réduit de trente-six à *vingt et un* inégaux au plus, en montrant qu'il y a entre eux nécessairement *quinze égalités;* sans quoi l'on pourrait, observe-t-il, à l'aide d'un corps élastique dilaté ou déformé, puis ramené à son premier état, créer de toutes pièces du travail mécanique, ou produire le mouvement perpétuel sans consommation de moteur ni de chaleur [**].

[*] *Comptes rendus des séances*, t. LVI, p. 475.

[**] *On Propagation of Light in crystallised Media*, 1839 (*Transactions of the Cambridge Society*, vol. VII, part II, p. 122), ou *Sur le Nombre des coefficients inégaux, etc.*, Note insérée aux *Comptes rendus*, 16 décembre 1861, t. LIII, p. 1107. *Voyez*, aussi, n° 2 ci-après, p. 265.

Nous disons : à vingt et un *au plus*, car la plus simple considération des accroissements que les déformations doivent nécessairement faire subir aux actions moléculaires réciproques dont l'élasticité dépend, et qui dépendent elles-mêmes des distances entre les molécules, ou plutôt, et nécessairement, entre leurs *points* élémentaires, conduit très-facilement (dernière note du n° 2 ci-après) à *six* autres égalités des mêmes coefficients deux à deux, ou à leur réduction à *quinze*, ce que ne contredisent nullement les expériences convenablement interprétées. Mais comme ce point est encore controversé, nous en rendrons indépendants la plupart de nos calculs, dont plusieurs conséquences seront, au reste, de nature à l'éclaircir et à le résoudre, nous le pensons, dans un sens opposé à l'opinion qui s'est formée le plus généralement depuis peu à son sujet.

Or, les grandeurs de ces coefficients dépendent des directions choisies dans le corps pour celles des coordonnées, ordinairement rectangles, entrant dans les formules qu'ils affectent. Trois d'entre eux, en effet, dits d'élasticité *directe*, représentent les nombres par lesquels il faut multiplier les proportions des petites dilatations ou contractions opérées dans ces directions, pour avoir les intensités des pressions ou tensions qu'elles développent, suivant leurs sens, à travers les plans qui leur sont normaux; et les dix-huit autres, appelés d'élasticité *tangentielle, latérale*, etc., ont des significations plus ou moins analogues, que les formules de composantes de pression ci-après font ressortir.

Qu'on change les axes coordonnés, les coefficients prennent des grandeurs différentes.

Nous nous proposons principalement :

1° D'établir (après un préambule nécessaire où l'on tient compte d'éléments ordinairement omis dans la théorie de l'élasticité) des formules, ou plutôt *une formule générale symbolique* très-simple, servant à déterminer les divers coefficients d'élasticité pour un système nouveau d'axes coordonnés x', y', z', étant donnés les mêmes coefficients pour un premier système d'axes x, y, z, et les angles des axes nouveaux avec les anciens; formule donnant même plus généralement les coefficients de l'expression d'une composante oblique quelconque de pression.

2° De représenter par une surface courbe la loi de variation des principaux de ces coefficients.

3° De considérer en particulier le cas d'une distribution en quelque sorte *ellipsoïdale* des élasticités directes; de montrer que ce cas doit être, au moins très-approximativement, celui des corps amorphes ou à cristallisation confuse, ou des milieux occupés par une matière primitivement isotrope qui a été comprimée ou dilatée inégalement en différents sens, et de faire voir que lorsqu'il a lieu, les équations de l'équilibre intérieur sont aussi facilement intégrables que lorsqu'il y a égale élasticité en tous sens.

4° De déduire des formules ainsi obtenues, ainsi que des équations de l'équilibre d'élasticité complétées en ce qui regarde les pressions *antérieures aux déplacements*, des conséquences qui paraissent importantes, concernant certaines conditions, au nombre de quatorze, auxquelles l'illustre Green a proposé d'assujettir les coefficients dans la vue d'accommoder *exactement* les résultats de l'analyse des vibrations lumineuses avec l'hypothèse de Fresnel relative à la direction qu'elles suivent, selon lui, jusque dans l'intérieur des milieux biréfringents; de montrer qu'il suffit, pour avoir la surface d'onde du physicien français, d'admettre dans le milieu éthéré le mode de distribution des élasticités dont on vient de parler (3°) et qui est extrêmement probable; et de présenter à ce sujet des considérations pouvant intéresser l'avenir de la théorie de la lumière, comme elles intéressent la solution d'un point litigieux de la théorie de l'élasticité.

5° De faire voir que les coefficients ou *modules* d'élasticité, définis, à la manière de Young et de Navier, par les résistances à la traction de petits prismes extraits d'un corps dans diverses directions, se distribuent aussi ellipsoïdalement dans le cas d'intégrabilité ci-dessus, cas qui intéresse particulièrement la pratique, puisque ce sont des solides irrégulièrement cristallisés, mais non toujours isotropes, qui sont employés généralement comme matériaux dans les constructions [*].

---

[*] Un résumé plus complet est à la fin, § VI ou n° 30.

§ II. — *Formules diverses où entrent les coefficients dont l'élasticité dépend. — Établissement, de plusieurs manières, d'une partie souvent omise, où figurent six constantes complémentaires, qui sont les composantes des pressions pouvant exister antérieurement aux déplacements des points.*

2. *Formules des composantes de pression, et du* potentiel *des actions intérieures.* — Lorsqu'un corps élastique est *déformé,* c'est-à-dire dilaté, fléchi, etc., ou que ses parties sont *déplacées* les unes par rapport aux autres, mais de manière que les distances entre celles qui sont fort proches n'augmentent ou ne diminuent que dans de très-faibles proportions, les trois côtés adjacents, supposés primitivement parallèles à des coordonnées rectangles x, y, z, d'un quelconque de ses éléments de forme parallélipipède, changent légèrement de *longueur* et aussi d'*inclinaison mutuelle.* Appelons, suivant une notation que nous avons souvent employée, et que Cauchy a fini par adopter à peu de chose près,

$$\delta_x, \quad \delta_y, \quad \delta_z$$

les trois *dilatations,* ou les proportions *supposées très-petites* des allongements positifs ou négatifs de ces côtés de l'élément, et

$$g_{yz}, \quad g_{zx}, \quad g_{xy}$$

les trois *glissements,* c'est-à-dire les cosinus, *aussi très-petits,* de leurs angles (y, z), (z, x), (x, y) devenus un peu aigus, ou bien ce dont ces angles primitivement droits ont diminué, ce qui revient bien aux quantités dont les côtés opposés deux à deux des trois faces adjacentes ont *glissé* les uns devant les autres pour l'unité de leur distance.

Soient, de plus, en nous servant d'une notation qui nous a été conseillée par Coriolis, et que Cauchy a aussi employée finalement (*),

$$p_{xx}, \quad p_{yy}, \quad p_{zz}, \quad p_{yz} = p_{zy}, \quad p_{zx} = p_{xz}, \quad p_{xy} = p_{yx}$$

---

[*] *Comptes rendus,* 20 février 1854, t. XXXVIII, p. 329.

les composantes, dans les sens x, y, z, des pressions, ou plutôt des tensions ou tractions sur l'unité superficielle de trois faces perpendiculaires à ces coordonnées, la première sous-lettre désignant la face par sa normale, et la seconde le sens de décomposition, pressions qui ne sont autre chose que les résultantes des actions s'exerçant à travers ces faces. Tout le monde admet que si les pressions ou tensions *sont produites seulement par les déformations éprouvées*, c'est-à-dire si, antérieurement, le corps se trouvait dans l'état dit *naturel*, où aucune pression intérieure ni extérieure ne s'y exerçait, cas pour lequel nous les distinguons par un indice supérieur 1, ou par

$$p^1_{xx}, \quad p^1_{yy}, \quad p^1_{zz}, \quad p^1_{yz}, \quad p^1_{zx}, \quad p^1_{xy},$$

ces six forces sont fonctions *linéaires* des six *déformations élémentaires* $\partial_x, \ldots, g_{xy}$, en sorte que si l'on désigne par

$$a_{xxxx}, \quad a_{xxyy}, \ldots, \quad a_{xyxy}$$

des coefficients qui dépendent de la nature et de la contexture du corps, et qui sont constants dans tous ses points s'il est homogène [*], mais fonctions des coordonnées s'il est hétérogène, on a les formules suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
p^1_{xx} &= a_{xxxx}\partial_x + a_{xxyy}\partial_y + a_{xxzz}\partial_z + a_{xxyz}g_{yz} + a_{xxzx}g_{zx} + a_{xxxy}g_{xy},\\
p^1_{yy} &= a_{yyxx}\partial_x + a_{yyyy}\partial_y + a_{yyzz}\partial_z + a_{yyyz}g_{yz} + a_{yyzx}g_{zx} + a_{yyxy}g_{xy},\\
p^1_{zz} &= a_{zzxx}\partial_x + a_{zzyy}\partial_y + a_{zzzz}\partial_z + a_{zzyz}g_{yz} + a_{zzzx}g_{zx} + a_{zzxy}g_{xy},\\
p^1_{yz} &= a_{yzxx}\partial_x + a_{yzyy}\partial_y + a_{yzzz}\partial_z + a_{yzyz}g_{yz} + a_{yzzx}g_{zx} + a_{yzxy}g_{xy},\\
p^1_{zx} &= a_{zxxx}\partial_x + a_{zxyy}\partial_y + a_{zxzz}\partial_z + a_{zxyz}g_{yz} + a_{zxzx}g_{zx} + a_{zxxy}g_{xy},\\
p^1_{xy} &= a_{xyxx}\partial_x + a_{xyyy}\partial_y + a_{xyzz}\partial_z + a_{xyyz}g_{yx} + a_{xyzx}g_{zx} + a_{xyxy}g_{xy},
\end{aligned}\right.$$

---

[*] Ou, plus exactement, s'il jouit de l'homogénéité ordinaire qu'on peut appeler *parallèle* ou *rectiligne*, qui fait place à une homogénéité *curviligne* (ou semi-polaire, polaire, etc.) si l'on vient à courber en anneau, en tuyau ou en sphère creuse une lame du corps possédant cette homogénéité ordinaire que nous considérerons seule dans ce qui va suivre, et qui est celle des cristaux ou au moins de la plupart d'entre eux (voyez *Comptes rendus*, 21 mai 1860, t. L, p. 930).

qui sont généralement admises, disons-nous, mais par des raisons diverses ; car beaucoup de géomètres les posent en quelque sorte à priori, regardant leur forme linéaire comme une conséquence obligée *de la petitesse des six variables* ∂, g, ou des déplacements relatifs des points du corps; et d'autres les déduisent, plus rationnellement, des faits et de la grande loi physique qu'ils révèlent, en vertu de laquelle les actions entre les points matériels sont fonctions continues de leurs distances mutuelles, et dirigées suivant leurs lignes de jonction deux à deux, en sorte que toute dilatation et tout glissement très-petit, qui change extrêmement peu les distances, développe des forces proportionnelles aux *premières puissances* de leurs petits changements et par conséquent de ce glissement et de cette dilatation ; raisonnement dont la traduction analytique complète trouvera sa place plus loin (2e note du n° 5).

On sait aussi que si l'on appelle

$$u, \quad v, \quad w$$

les projections sur les x, y, z du déplacement, dans l'espace, du point dont x, y, z étaient les coordonnées primitives, devenues ainsi $x+u$, $y+v$, $z+w$, et si ces projections sont *très-petites* pour les points de la petite portion de corps que l'on considère, on a

$$(2)\quad \begin{cases} \partial_x = \dfrac{du}{dx}, \quad \partial_y = \dfrac{dv}{dy} \quad \partial_z = \dfrac{dw}{dz}, \\ \mathrm{g}_{yz} = \dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy}, \quad \mathrm{g}_{zx} = \dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}, \quad \mathrm{g}_{xy} = \dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}. \end{cases}$$

Mais nous serons dans le cas d'employer des expressions plus générales, pour lesquelles les déplacements absolus u, v, w dans l'espace *sont aussi grands qu'on veut*, et les déplacements, même relatifs, de deux points du même corps à une distance sensible l'un de l'autre, peuvent être considérables [*], mais sont supposés tels, toutefois, que

[*] Comme il arrive, par exemple, quand on ploie en cercle une lame mince de manière que les deux bouts se touchent, ce qui peut avoir lieu sans lui faire perdre la faculté de revenir d'elle-même à son premier état et sans que les formules cessent d'être applicables à sa flexion (*Comptes rendus*, 22 février 1847, t. XXIV, p. 260).

la condition énoncée de proportion très-petite des changements de distance entre points très-proches soit remplie; ce qui revient à ce que *les dilatations et les glissements restent très-petits partout*. Alors on a pour ces quantités les expressions suivantes :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta_x &= \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right],\\
\delta_y &= \frac{dv}{dy} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dy}\right)^2\right],\\
\delta_z &= \frac{dw}{dz} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right].\\
g_{yz} &= \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} + \frac{du}{dy}\frac{du}{dz} + \frac{dv}{dy}\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\frac{dw}{dz},\\
g_{zx} &= \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} + \frac{du}{dz}\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dz}\frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dz}\frac{dw}{dx},\\
g_{xy} &= \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dx}\frac{dw}{dy}\ [*].
\end{aligned}\right.$$

---

[*] En effet, si

$$x_1 = x + u, \quad y_1 = y + v, \quad z_1 = z + w$$

désignent les coordonnées nouvelles du point (x, y, z) supposé placé à un angle du parallélipipède élémentaire dont les côtés adjacents primitifs très-petits sont x, y, z parallèlement aux x, y, z, l'on a

$$x_1 + \frac{dx_1}{dx}\,\mathrm{x}, \quad y_1 + \frac{dy_1}{dx}\,\mathrm{x}, \quad z_1 + \frac{dz_1}{dx}\,\mathrm{x}$$

pour les coordonnées nouvelles de la seconde extrémité du côté x, ce qui donne :

1° Pour la longueur nouvelle de ce côté,

$$\mathrm{x}(1 + \delta_x) = \mathrm{x}\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2},$$

d'où

$$\delta_x = \sqrt{\left(1 + \frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} - 1;$$

2° Pour les cosinus des angles qu'il fait maintenant avec les axes fixes x, y, z,

$$\frac{\frac{dx_1}{dx}\,\mathrm{x}}{(1 + \delta_x)\,\mathrm{x}} = \frac{1 + \frac{du}{dx}}{1 + \delta_x} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{dv}{dx}}{1 + \delta_x}, \quad \frac{\frac{dw}{dx}}{1 + \delta_x};$$

Il est également facile de voir que si

$$\Phi$$

représente ce qu'on appelle quelquefois l'*énergie potentielle* ou simplement le *potentiel* des actions intérieures pour l'unité de volume du corps au point (x, y, z), c'est-à-dire si

$$\Phi . xyz$$

exprime, pour l'élément dont le centre est en ce point et dont les dimensions parallèles aux coordonnées sont x, y, z, le *travail total* que ces actions intérieures produiraient jusqu'au retour de l'élément à son état dit *naturel*, où il n'y avait, disons-nous, aucune pression, et si nous désignons par

$$\Phi^1$$

la valeur de Φ dans le cas pour lequel nous appelons p^1_{xx}, p^1_{yy}, etc., les pressions p_{xx}, p_{yy}, etc., c'est-à-dire dans le cas où les déformations δ, g se comptent à partir de cet état naturel, l'augmentation $d\Phi^1$, due à des accroissements infiniment petits $d\delta_x, \ldots, dg_{yz}, \ldots$ de ces six déformations élémentaires, a pour valeur

$$(4)\quad d\Phi^1 = p^1_{xx} d\delta_x + p^1_{yy} d\delta_y + p^1_{zz} d\delta_z + p^1_{yz} dg_{yz} + p^1_{zx} dg_{zx} + p^1_{xy} dg_{xy} \text{ [*]};$$

---

et des expressions analogues pour les angles des deux autres côtés y, z avec les axes; d'où, pour le cosinus de l'angle que ceux-ci font maintenant entre eux,

$$g_{yz} = \frac{\frac{du}{dy}}{1+\delta_y}\,\frac{\frac{du}{dz}}{1+\delta_z} + \frac{1+\frac{dv}{dy}}{1+\delta_y}\,\frac{\frac{dv}{dz}}{1+\delta_z} + \frac{\frac{dw}{dy}}{1+\delta_y}\,\frac{1+\frac{dw}{dz}}{1+\delta_z}.$$

Ces expressions, vraies quelles que soient les grandeurs de u, v, w ainsi que de δ_x, δ_y, δ_z et de g_{yz}, se réduisent, lorsque ces quatre dernières quantités sont très-petites, à la première et à la quatrième des expressions (3), comme on s'en assure en élevant au carré $1+\delta_x$, et en multipliant g_{yz} par $(1+\delta_y)(1+\delta_z)$.

[*] Car les actions intérieures font à chaque instant équilibre aux pressions $p^1_{xx}, \ldots, p^1_{xy}$ sur les six faces de l'élément, et le travail des unes est égal, au signe près, au travail des autres; or, pour une augmentation $d\delta_z$ de la dilatation δ_z par exemple, les

ce qui montre que le potentiel ou travail Φ^1, nécessairement le même, quand la quantité de chaleur ou de force vive vibratoire ne varie pas, pour d'égales valeurs de

$$\partial_x, \quad \partial_y, \quad \partial_z, \quad g_{yz}, \quad g_{zx}, \quad g_{xy},$$

ou qui est ainsi une fonction de ces six variables, *a pour dérivées partielles, par rapport à chacune, les six composantes respectives de pression*

$$p^1_{xx}, \quad p^1_{yy}, \quad p^1_{zz}, \quad p^1_{yz}, \quad p^1_{zx}, \quad p^1_{xy}.$$

D'où

$$\frac{dp^1_{xx}}{d\partial_y} = \frac{d^2\Phi^1}{d\partial_x d\partial_y} = \frac{dp^1_{yy}}{d\partial_x}, \ldots, \quad \frac{dp^1_{zz}}{dg_{xy}} = \frac{d^2\Phi^1}{d\partial_z dg_{xy}} = \frac{dp^1_{xy}}{d\partial_z}, \ldots;$$

ce qui donne la raison des *quinze* égalités deux à deux suivantes entre les coefficients a, reconnues par Green comme découlant bien (n° 1) du principe de la nullité du travail total après retour au même état :

$$(5) \qquad \begin{cases} a_{yyzz} = a_{zzyy}, \ldots, & a_{xxyz} = a_{yzxx}, \ldots, \quad a_{zxxy} = a_{xyzx}, \\ \text{etc.} & \text{etc.} \qquad\qquad \text{au nombre de } 15, \end{cases}$$

et qui reviennent à ce qu'*on peut faire permuter le premier groupe de deux indices ou sous-lettres avec le second groupe sans changer la valeur d'un coefficient.*

---

deux faces xy se sont éloignées de $z d\partial_z$, et les pressions $p^1_{zz}.xy$ qui s'y exercent produisent un travail

$$p^1_{zz}.xy.z d\partial_z$$

ou $p^1_{zz} d\partial_z$ par unité de volume. Et si, l'une des deux faces xy restant immobile, le glissement g_{zx} vient à augmenter de dg_{zx}, l'autre face xy chemine de $z dg_{zx}$ dans le sens x, et la composante tangentielle $p^1_{zx}.xy$ de même sens produit un travail

$$p^1_{zx}.xy.z dg_{zx};$$

et comme aucun espace n'a été parcouru dans le sens z par les faces yz qui ont en même temps tourné un peu autour des arêtes y, il y a, par unité de volume, un travail $p^1_{zx} dg_{zx}$; travail qui serait le même au total, comme il est facile de voir, si les deux faces xy éprouvaient elles-mêmes de petits mouvements quelconques. Ainsi se trouvent justifiés les divers termes de l'expression (4) (*voyez* l'observation à la fin du n° 3)

Il en résulte encore l'expression suivante du potentiel, toujours quand les pressions, dans l'état qui a précédé les déformations δ, g, étaient nulles :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}\Phi' = {} & \frac{1}{2}a_{xxxx}\delta_x^2 + \frac{1}{2}a_{yyyy}\delta_y^2 + \frac{1}{2}a_{zzzz}\delta_z^2 \\ & + \frac{1}{2}a_{yzyz}g_{yz}^2 + \frac{1}{2}a_{zxzx}g_{zx}^2 + \frac{1}{2}a_{xyxy}g_{xy}^2 \\ & + a_{yyzz}\delta_y\delta_z + a_{zzxx}\delta_z\delta_x + a_{xxyy}\delta_x\delta_y \\ & + a_{zxxy}g_{zx}g_{xy} + a_{xyyz}g_{xy}g_{yz} + a_{yzzx}g_{yz}g_{zx} \\ & + a_{xxyz}\delta_x g_{yz} + a_{yyzx}\delta_y g_{zx} + a_{zzxy}\delta_z g_{xy} \\ & + a_{yyyz}\delta_y g_{yz} + a_{zzyz}\delta_z g_{yz} + a_{zzzx}\delta_z g_{zx} + a_{xxzx}\delta_x g_{zx} \\ & \qquad + a_{xxxy}\delta_x g_{xy} + a_{yyxy}\delta_y g_{xy}\,;\end{aligned}\right.$$

car cette expression est nulle pour les δ, g tous nuls, et elle satisfait bien, d'après les formules (1), à l'équation (4), qui donne

$$\frac{d\Phi'}{d\delta_x} = p_{xx},\quad \frac{d\Phi'}{d\delta_y} = p_{yy},\ldots,\quad \frac{d\Phi'}{dg_{xy}} = p_{xy}.$$

Elle est, comme on voit, homogène et du second degré, par conséquent à *vingt et un termes* affectés des six carrés et des quinze produits de ses six variables.

Green la pose de prime abord, en supposant *que la fonction* Φ' *doit se développer nécessairement suivant les puissances entières des variables* δ, g, dont il néglige les puissances 3 et au-dessus, et dont il efface les puissances 1, qui ne doivent figurer que lorsqu'il y a des pressions antérieures aux déformations. Nous avons préféré la déduire des expressions (1) des composantes de pression, en supposant déjà démontrée la forme linéaire de celles-ci; et elle se démontre complétement, comme on verra au n° **3**, en calculant le travail des actions s'exerçant de molécule à molécule.

Elle revient, au reste, d'après les expressions (1), à la suivante :

$$(7)\quad \Phi' = \frac{1}{2}p_{xx}^1\delta_x + \frac{1}{2}p_{yy}^1\delta_y + \frac{1}{2}p_{zz}^1\delta_z + \frac{1}{2}p_{yz}^1 g_{yz} + \frac{1}{2}p_{zx}^1 g_{zx} + \frac{1}{2}p_{xy}^1 g_{xy},$$

qui est bien aussi l'intégrale qu'on obtient de l'expression (4) de $d\Phi'$,

en supposant que les pressions $p_{xx}, \ldots, p_{xy}$ ont crû uniformément depuis zéro jusqu'aux valeurs qu'elles possèdent lorsque les dilatations et glissements ont atteint leurs valeurs $\partial_x, \ldots, g_{xy}$; loi de croissance qu'on peut toujours admettre en négligeant des petites quantités d'ordre supérieur. Et cette expression (7), différentiée successivement par rapport à $\partial_x, \partial_y, \ldots, g_{xy}$, donne bien $p^1_{xx}, p^1_{yy}, \ldots, p^1_{xy}$, si l'on a égard à leurs valeurs (1).

Les *six* égalités *complémentaires* entre les coefficients a, dont nous avons parlé au n° 1, et qui sont fournies comme les quinze égalités (5) lorsqu'on calcule les pressions comme des résultantes d'actions s'exerçant entre les molécules, ou plutôt entre leurs *points* composants, suivant les lignes de jonction deux à deux de ceux-ci, et avec des intensités fonctions continues de leurs distances, sont les suivantes :

$$(8) \qquad \begin{cases} a_{yyzz} = a_{yzyz}, & a_{zzxx} = a_{zxzx}, & a_{xxyy} = a_{xyxy}, \\ a_{xxyz} = a_{zxxy}, & a_{yyzx} = a_{xyyz}, & a_{zzxy} = a_{yzzx}, \end{cases}$$

permettant, comme on voit, de faire permuter à volonté même *une* des deux premières sous-lettres avec *une* des deux dernières; en sorte qu'en les admettant, ainsi que les quinze égalités (5), *il y a égalité entre les divers coefficients possédant les mêmes quatre sous-lettres, quel que soit l'ordre de celles-ci* (car, dans tous les cas, la permutation des deux sous-lettres, soit dans le premier, soit dans le second groupe binaire, est permise, puisque g_{yz} est la même chose que g_{zy}, et qu'il est démontré, comme on sait, que $p_{yz} = p_{zy}$).

Ces six égalités réduisent les coefficients à *quinze* pour le cas le plus général de contexture, et à *un seul* pour la contexture isotrope, tandis qu'il en reste *deux* pour cette dernière contexture lorsqu'on en conserve 21 comme lorsqu'on en conserve 36 inégaux pour le cas le plus général.

Ces mêmes égalités complémentaires (8), ou ces réductions des coefficients à 15 pour le cas général et à un seul pour l'isotropie, se sont offertes aux géomètres dès l'établissement des premières formules de la théorie de l'élasticité. Elles n'exigent nullement, pour être prouvées, ces « intégrations autour d'un point » que Navier, Poisson, etc., opé-

raient par coordonnées polaires ou sphériques [*], ni même la considération de ces sommes $\mathfrak{S}$ (n° 3 ci-après) d'un nombre considérable, mais fini, de composantes d'actions moléculaires dont la construction demande quelquefois qu'on substitue certaines actions à d'autres équivalentes [**], car on peut les prouver sans cela, et en raisonnant sur les actions effectivement en jeu [***].

---

[*] M. Clausius (*Ueber die Veränderungen...*, Sur les changements, etc., *Annales de Poggendorff*, vol. LXXVI, p. 58) a d'ailleurs très-bien justifié ces intégrations en en modifiant le sens, à savoir, en prenant pour limite inférieure de la coordonnée linéaire, non pas zéro, comme s'il s'agissait d'une matière *continue* qui n'existe pas, mais l'intervalle moyen entre les molécules les plus voisines, et en regardant l'intégrale comme remplaçant non pas une somme particulière relative aux diverses molécules qui en environnent une seule, mais la moyenne d'un très-grand nombre de pareilles sommes.

[**] Cette substitution, très-permise mais pouvant prêter à objection, d'actions émanant toutes du centre d'une petite face aux actions dont les directions la traversent en ses divers points, n'a besoin d'être faite (2e note du n° 3) que pour le calcul des pressions. Elle n'est nullement nécessaire (4e *ibid.* et note du n° 4) quand on établit directement, soit l'expression du potentiel, soit les équations d'équilibre.

[***] Il suffit pour cela de démontrer que si n désigne la direction de la normale à l'un des trois plans coordonnés ou même à une face quelconque, les coefficients de ∂_y et de g_{yz}, par exemple, dans l'expression de la composante p_{nx}, parallèle aux x, de la pression sur cette face, sont les mêmes respectivement que les coefficients de g_{xy}, de g_{zx} dans l'expression de la composante p_{ny} de la même pression parallèlement aux y, ou qu'on a, avec nos notations,

$$a_{nxyy} = a_{nyxy} \quad \text{et} \quad a_{nxyz} = a_{nyzx}.$$

Or, pour avoir la première de ces deux égalités, il suffit de considérer : 1° Qu'une dilatation ∂_y n'est autre chose qu'une déformation qui éloigne les uns des autres les plans matériels perpendiculaires à la coordonnée y de quantités égales à leurs intervalles multipliés par la petite fraction ∂_y; qu'elle allonge en conséquence la distance r de deux points matériels m, m' supposés situés de part et d'autre de la petite face, comme si, le premier m restant fixe, le second m' cheminait, parallèlement aux y, de $\partial_y . r \cos(r, y)$. 2° Qu'un glissement g_{xy} n'est autre chose qu'une déformation faisant glisser les uns devant les autres, dans le sens y, les plans perpendiculaires aux x, de quantités égales à leurs intervalles multipliés par la petite fraction g_{xy}, en sorte qu'il allonge la même distance $r = mm'$ comme si, m restant fixe, m' cheminait parallèlement aux y de $g_{xy} . r \cos(r, x)$. 3° Que ces petits cheminements de m', de même direction tous deux, étant l'un et l'autre projetés sur une même ligne, savoir mm' prolon-

Ce n'est pas ici le lieu de montrer, comme nous avons déjà fait et comme nous ferons encore ailleurs avec détail [*], que les désaccords apparents entre les résultats des formules et ceux de diverses expériences disparaissent, soit en discutant soigneusement celles-ci, soit en attribuant aux corps métalliques ou vitreux sur lesquels elles ont porté un petit degré d'hétérotropie ou d'hétérogénéité infiniment probable. Ce n'est pas non plus le moment de faire observer que les formules (1), et d'autres de même forme, ne doivent être appliquées ni aux corps ductiles se comportant « d'une manière intermédiaire », comme ont dit quelques auteurs, « entre les solides et les liquides », ni aux corps mous et élastiques d'une nature gommeuse; de rappeler aux géomètres que toute fonction n'est pas développable suivant les puissances *entières* de ses variables en commençant par la puissance 1, et qu'on n'est nullement en droit de conclure de la petitesse de celles-ci la *linéarité* de celle-là; en sorte que la forme linéaire des expressions (1) de $p_{xx}, \ldots, p_{xy}$, que nous admettons comme tout le monde, ne peut être démontrée, dans notre intime conviction, qu'en invoquant la loi physique des actions réci-

---

gée, donnent deux allongements de la distance $mm' = r$ qui sont entre eux comme $\partial_y \cos(r, y)$ à $g_{xy} \cos(r, x)$; que les actions développées entre ces points matériels dans la direction mm' suivent le même rapport, en sorte que décomposées, la première suivant les x (comme faisant partie de p_{nx}), la deuxième suivant les y (comme faisant partie de p_{ny}), elles donnent des composantes proportionnelles à $\partial_y \cos(r, y) \cos(r, x)$ et à $g_{xy} \cos(r, x) \cos(r, y)$ et par conséquent à ∂_y et à g_{xy}. D'où il suit que p_{nx} a le même rapport avec ∂_y si cette dilatation engendre seule la pression, que p_{ny} avec g_{xy} si elle n'est engendrée que par ce glissement; ce qui n'est autre chose que la première égalité $a_{nxyy} = a_{nyxy}$. L'autre, $a_{nxyz} = a_{nyzx}$, se prouve par un raisonnement semblable, aussi simple et aussi exempt de toute demande autre que celle de l'admission de la loi des actions entre les points matériels du corps, sans même s'occuper de la question de savoir si leur matière est discontinue ou continue. D'où les six égalités (8) et même les quinze (5), en particularisant la direction n et changeant entre elles les coordonnées.

Déjà l'on trouve au Mémoire *Laws of Elasticity* de M. Rankine (*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, vol. V, ou *Cambr.*, vol IX, 1850, § III, théorème IV) cette sorte de raisonnement que nous avions cru présenter le premier à l'article 7 de notre Mémoire de 1855 sur la Flexion des prismes (*Journal de M. Liouville*, 1856, p. 105).

[*] Principalement au Ve appendice d'une nouvelle édition des *Leçons* de Navier.

proques entre points matériels suivant leurs lignes de jonction et proportionnellement à des fonctions de leurs distances, loi dont l'invocation conduit mathématiquement aux six égalités complémentaires (8), et dont on ne saurait, du reste, s'affranchir sans mettre en doute toute la mécanique même mathématique; car cette science attribue à toute force un *point* d'application, et, par suite, en vertu de l'égalité et de l'opposition directe qu'elle admet entre toute action et une réaction correspondante, attribue nécessairement aussi à toute force élémentaire un *point* dont elle émane, en s'exerçant suivant la droite qui le joint à celui où elle agit; enfin, de remarquer que faire inégaux, dans les formules, des nombres dont les plus fortes raisons prouvent l'égalité, loin d'être un acte de prudente abstention, expose, au contraire, par l'exagération commode du nombre des constantes disponibles, à se contenter d'expédients dans l'interprétation des faits et à se payer d'explications faciles et illusoires, dont le moindre inconvénient est d'arrêter des recherches plus profondes et plus délicates, et d'ajourner indéfiniment la découverte expérimentale des explications véritables.

Nous nous bornons donc ici à faire nos réserves, et si nous laissons le plus souvent dans nos formules les vingt et un coefficients inégaux, afin de montrer que la plupart de nos résultats sont indépendants des six égalités (8) contestées aujourd'hui par plusieurs savants, nous ne négligerons pas de développer quelques résultats de leur admission, et qui nous paraissent de nature à être appliqués utilement et sûrement.

3. *Termes à ajouter aux formules* (1) *et* (6) *quand il y avait des pressions antérieurement aux déformations* δ, g *du corps élastique ou aux déplacements* u, v, w *de ses points; ou quand les déformations se comptent à partir d'un état qui n'était pas l'état naturel.* — Ces pressions intérieures primitives, dont il convient de tenir compte, sont dues, ou à des pressions extérieures s'exerçant sur la surface, comme la pression atmosphérique, ou à des forces telles que la pesanteur agissant déjà sur tous les points du corps dans l'état dont on part.

Quand elles existent, il ne suffit pas, pour avoir le potentiel Φ, d'ajouter la valeur qu'il pouvait avoir dans cet état primitif, et que nous

appellerons

$$\Phi^0,$$

à celle que nous avons nommée Φ^1 et exprimée par un polynôme (6) $\frac{1}{2}a_{xx\,xx}\delta_x^2 + \text{etc.}$, en fonction des déplacements δ, g; car les pressions primitives *travaillent* pendant que ces déformations s'opèrent, ou que les faces de l'élément parallélipipède considéré au numéro précédent s'éloignent les unes des autres ou glissent les unes devant les autres.

Si nous appelons

$$p_{xx}^0,\ p_{yy}^0,\ p_{zz}^0,\ p_{yz}^0,\ p_{zx}^0,\ p_{xy}^0$$

les six composantes de ces pressions sur l'unité superficielle de trois faces se croisant au point (x, y, z) perpendiculairement aux coordonnées, ou les valeurs de $p_{xx}, \ldots, p_{xy}$ antérieurement aux déplacements, on trouve, en faisant sur leur travail total le même raisonnement qui a conduit à l'expression (4) $d\Phi^1 = p_{xx}^1 d\delta_x + \text{etc.}$, du travail élémentaire des p^1 :

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \Phi = \Phi^0 + p_{xx}^0\delta_x + p_{yy}^0\delta_y + p_{zz}^0\delta_z + p_{yz}^0 g_{yz} + p_{zx}^0 g_{zx} + p_{xy}^0 g_{xy} + \Phi^1 \\ \quad \Big(\Phi^1 \text{ représentant toujours le polynôme à vingt et un termes} \\ \qquad (6)\quad \frac{1}{2}a_{xx\,xx}\delta_x^2 + \ldots + a_{yy\,xy}\delta_y g_{xy}\Big). \end{array}\right.$$

La partie de cette expression entre Φ^0 et Φ^1 est double, sauf les p^0 au lieu des p^1, de l'expression (7) de Φ^1; cela vient de ce que les pressions primitives p_{xx}^0, etc., avaient déjà acquis toute leur valeur au commencement des dilatations et des glissements, et restent constantes pendant que ces mouvements s'opèrent, au lieu de commencer par zéro comme les pressions engendrées p_{xx}^1, etc.

Les pressions $p_{xx}, \ldots, p_{xy}$ après les déformations δ, g ou les déplacements u, v, w ne résultent pas non plus d'une addition pure et simple des pressions primitives p^0 et de celles p^1 qu'on aurait si celles-ci étaient nulles, car leur existence influe sur l'effet ultérieur de ces déplacements. Même, cette influence ne dépend pas seulement des *dilatations* et *glissements* δ, g ou des fonctions (2) ou (3) des dérivées

$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \ldots$ des déplacements. Il faut, pour l'évaluer, *faire entrer dans le calcul ces neuf dérivées elles-mêmes.* On le conçoit sans peine en considérant que dans le cas simple où par exemple les déplacements ne produisent qu'*une rotation générale* qui n'altère en rien les distances mutuelles des molécules et n'engendre ainsi ni dilatation δ, ni glissement g, de pareils déplacements changent toujours, dans l'intérieur du corps, ou par rapport à ses molécules, les situations de trois plans perpendiculaires aux coordonnées passant par un point quelconque, en sorte que les pressions sur ces plans de direction fixe dans l'espace doivent prendre d'autres grandeurs, si elles n'étaient pas primitivement égales en tous sens autour de chaque point.

Voici les formules complètes que l'on trouve pour les six composantes de pression après les déplacements u, v, w supposés très-petits,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
p_{xx} &= p^0_{xx}\left(1+\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dy}-\frac{dw}{dz}\right)+2p^0_{xy}\frac{du}{dy}+2p^0_{zx}\frac{du}{dz}+p^1_{xx},\\
p_{yy} &= p^0_{yy}\left(1-\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}-\frac{dw}{dz}\right)+2p^0_{yz}\frac{dv}{dz}+2p^0_{xy}\frac{dv}{dx}+p^1_{yy},\\
p_{zz} &= p^0_{zz}\left(1-\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)+2p^0_{zx}\frac{dw}{dx}+2p^0_{yz}\frac{dw}{dy}+p^1_{zz},\\
p_{yz} &= p^0_{yz}\left(1-\frac{du}{dx}\right)+p^0_{yy}\frac{dw}{dy}+p^0_{zz}\frac{dv}{dz}+p^0_{zx}\frac{dv}{dx}+p^0_{xy}\frac{dw}{dx}+p^1_{yz},\\
p_{zx} &= p^0_{zx}\left(1-\frac{dv}{dy}\right)+p^0_{zz}\frac{du}{dz}+p^0_{xx}\frac{dw}{dx}+p^0_{xy}\frac{dw}{dy}+p^0_{yz}\frac{du}{dy}+p^1_{zx},\\
p_{xy} &= p^0_{xy}\left(1-\frac{dw}{dz}\right)+p^0_{xx}\frac{dv}{dx}+p^0_{yy}\frac{du}{dy}+p^0_{yz}\frac{du}{dz}+p^0_{zx}\frac{dv}{dz}+p^1_{xy},\\
&\left[p^1_{xx}, p^1_{yy}, \ldots p^1_{xy} \text{ ayant les valeurs sextinômes (1)}\right.\\
&\left.a_{xxxx}\frac{du}{dx}+\ldots+a_{xxxy}\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right),\ a_{yyxx}\frac{du}{dx}+\ldots, \text{ etc., du n° } \mathbf{2}\right]:
\end{aligned}\right.$$

formules pouvant être réduites à $p_{xx} = p^0_{xx} + p^1_{xx}$, $p_{yy} = \ldots$, quand les pressions p^0 antérieures aux déplacements u, v, w sont au plus de l'ordre de grandeur des p^1, mais non pas lorsque celles-là excèdent beaucoup celles-ci, comme cela peut avoir lieu pour le milieu éthéré dont nous aurons à nous occuper au § IV.

On peut y arriver, comme Cauchy à qui elles sont dues [*], en se basant sur la loi des actions entre points matériels [**].

Mais les mêmes formules générales (10) peuvent être obtenues sans calculer ainsi les actions fonctions continues des distances moléculaires mutuelles, si l'on applique à la manière de Lagrange le principe des travaux virtuels en se servant de l'expression (9) du potentiel, basée elle-même sur les formules (1) des pressions p^1_{xx}, etc., dont il

---

[*] *Exercices de Mathématiques*, 4e année (1829), p. 138.

[**] En effet on peut voir d'abord (comme on a montré aux *Comptes rendus*, 7 juillet 1845, t. XXI, p. 24) que la pression sur une petite face, ou la résultante générale des actions moléculaires qui s'exercent dans toutes les directions à travers sa superficie ω, peut être remplacée *par la résultante des actions qu'exercerait, sur chaque molécule m située d'un des deux côtés de son plan, un pareil nombre de masses, concentrées au centre* M *de* ω, *et égales, pour chaque molécule m, à la masse du cylindre oblique taillé dans la matière du côté opposé, ayant* ω *pour base, et des arêtes égales et parallèles à la ligne de jonction* M*m du centre* M *à cette molécule m*; car ce cylindre contient évidemment toutes les molécules, situées de son côté, qui agissent sur des molécules situées du côté opposé de la face à des distances égales et parallèles à Mm; en sorte que l'une des deux résultantes comprend le même nombre total d'actions de mêmes directions et intensités que l'autre résultante, et elles sont égales. Il en résulte que si l'on suppose la face ω perpendiculaire aux x, et si l'on désigne par

r la distance Mm du centre M de la face à l'une quelconque des molécules environnantes;

$\frac{1}{2}\mathbf{S}$ une somme relative aux distances r de celles d'un côté de la face, ou $\mathbf{S}$ la somme relative aux distances de toutes celles des deux côtés;

x, y, z les projections de r sur les x, y, z;

fr l'action mutuelle de deux molécules par unité de leurs masses, à une distance ayant *la grandeur et la direction de r*, cette action étant supposée devenir insensible quand r devient sensible;

ρ la densité, en sorte que $\rho.\omega x$ est la masse du cylindre oblique; $\rho\omega x.m.fr$ est l'action, sur m, de cette masse concentrée en M; et $\rho\omega x.mfr.\frac{x}{r}$, $\rho\omega x.mfr.\frac{y}{r}$ sont les composantes de cette action suivant les x et suivant les y;

l'on a, pour l'état primitif du corps, en divisant par ω afin de rapporter les pressions à l'unité superficielle, la première et la dernière des expressions suivantes, dont les

faut supposer alors que la forme linéaire soit déjà établie, et en ayant

---

autres se prouvent de même,

$$(11)\quad \begin{cases} p^0_{xx} = \frac{\rho}{2} \mathbf{S}\, m \frac{fr}{r} \mathrm{x}^2, \quad p^0_{yy} = \frac{\rho}{2} \mathbf{S}\, m \frac{fr}{r} \mathrm{y}^2, \quad p^0_{zz} = \frac{\rho}{2} \mathbf{S}\, m \frac{fr}{r} z^2, \\ p^0_{yz} = \frac{\rho}{2} \mathbf{S}\, m \frac{fr}{r} \mathrm{yz}, \quad p^0_{zx} = \frac{\rho}{2} \mathbf{S}\, m \frac{fr}{r} \mathrm{zx}, \quad p^0_{xy} = \frac{\rho}{2} \mathbf{S}\, m \frac{fr}{r} \mathrm{xy}. \end{cases}$$

Actuellement, si, par suite des déplacements éprouvés par les points, on suppose que :

x, y, z, coordonnées de M, deviennent $x + u$, $y + v$, $z + w$;

$x + \mathrm{x}$, $y + \mathrm{y}$, $z + \mathrm{z}$, coordonnées de m, deviennent $x + u + \mathrm{x} + \Delta u$, $y + v + \mathrm{y} + \Delta v$, $z + w + \mathrm{z} + \Delta w$, les Δ désignant les excès des quantités relatives à m sur les quantités de même nom relatives à M;

ρ, r deviennent ρ_1, r_1;

l'on a, pour l'état nouveau,

$$p_{xx} = \frac{\rho_1}{2} \mathbf{S}\, m (\mathrm{x} + \Delta u)^2 \frac{fr_1}{r_1}, \quad p_{yz} = \frac{\rho_1}{2} \mathbf{S}\, m (\mathrm{y} + \Delta v)(\mathrm{z} + \Delta w) \frac{fr_1}{r_1}.$$

Or, en se bornant à écrire les premières puissances de quantités très-petites, on a

$$\frac{fr_1}{r_1} = \frac{fr}{r} + (r_1 - r) \frac{d\frac{fr}{r}}{dr},$$

$$r_1 - r = \frac{\mathrm{x}}{r} \Delta u + \frac{\mathrm{y}}{r} \Delta v + \frac{\mathrm{z}}{r} \Delta w, \text{ somme des projections de } \Delta u,\ \Delta v,\ \Delta w \text{ sur } r,$$

$$\Delta u = \frac{du}{dx} \mathrm{x} + \frac{du}{dy} \mathrm{y} + \frac{du}{dz} \mathrm{z}, \quad \Delta v = \frac{dv}{dx} \mathrm{x} + \ldots, \quad \Delta w = \frac{dw}{dx} \mathrm{x} + \ldots,$$

$$\rho_1 = \rho : \left(1 + \frac{du}{dx}\right)\left(1 + \frac{dv}{dy}\right)\left(1 + \frac{dw}{dz}\right) = \rho \left(1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right).$$

Substituant dans

$$p_{xx} = \frac{\rho_1}{2} \mathbf{S}\, m (\mathrm{x} + \Delta u)^2 \frac{fr_1}{r_1}, \quad p_{yz} = \ldots,$$

effectuant les multiplications, faisant passer hors des signes $\mathbf{S}$ les dérivées de u, v, w, qui sont les mêmes pour une portion imperceptible du corps, et dont les carrés et pro-

soin de mettre, comme Green [*], dans les six termes de l'expression (9) de Φ affectés des pressions primitives $p^0_{xx}, \ldots, p^0_{yz}, \ldots$ les *valeurs complètes* (3)

$$\frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2, \ldots, \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}+\frac{du}{dy}\frac{du}{dz}+\frac{dv}{dy}\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\frac{dw}{dz}, \text{ etc.},$$

des dilatations et glissements $\delta_x, \ldots, g_{yz}, \ldots$, afin de ne négliger que des produits du troisième ordre dans ces six termes comme dans les vingt et un venant de Φ^1, où l'on peut se contenter de substituer les expressions réduites (2) $\frac{du}{dx}, \ldots, \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}, \ldots$ des δ et g; et si, ensuite, l'on tire les valeurs des composantes de pression des conditions *définies* à satisfaire à la surface limite ou enveloppe du corps ou de la portion de corps que l'on considère [**].

---

duits peuvent être effacés; enfin faisant les quinze expressions

$$(12)\quad \frac{\rho}{2}\mathfrak{S}\, m\,\frac{1}{r}\,\frac{d\frac{fr}{r}}{dr}\,(\mathrm{x}^4 \text{ ou } \mathrm{x}^2\mathrm{y}^2 \text{ ou } \mathrm{x}^2\mathrm{yz} \text{ ou etc.}) = \mathrm{a}_{xxxx} \text{ ou } \mathrm{a}_{xxyy} \text{ ou } \mathrm{a}_{xxyz} \text{ ou etc.},$$

l'on obtient bien, eu égard aux valeurs précédentes (11) de $p^0_{xx}, \ldots, p^0_{xy}$, ainsi qu'aux expressions (1) que nous avons appelées $p^1_{xx}, \ldots, p^1_{xy}$ en y admettant les égalités (5) et (8) entre leurs coefficients, l'on obtient, dis-je, les formules complètes (10) qui sont à prendre pour les composantes de pression $p_{xx}, \ldots, p_{xy}$ quand il y a des pressions antérieurement aux déplacements.

[*] *On the Propagation of Light in crystallised Media* (*Transactions of the Cambridge Society*, vol. VII, p. 125-126).

[**] En effet, δ étant, comme dans la Mécanique analytique, la caractéristique des variations, les projections, sur les axes des x, y, z, de l'espace infiniment petit quelconque que l'on fait parcourir *virtuellement* à un point dont les coordonnées x, y, z sont devenues $x_1 = x + u$, $y_1 = y + v$, $z_1 = z + w$, ont pour grandeurs δx_1, δy_1, δz_1 qui sont la même chose que δu, δv, δw puisque les coordonnées primitives x, y, z n'ont pas de variations; en sorte que comme $\delta\Phi$, variation du potentiel, est le travail des forces intérieures par unité de volume d'un élément $dx\,dy\,dz$, si X, Y, Z sont les composantes suivant x, y, z des forces extérieures agissant à la manière de la pesanteur sur la même unité, et si

$$\varpi\, d\Omega$$

désigne la *pression extérieure* sur un élément quelconque $d\Omega$ de la surface-enveloppe,

La formule complète (9) du potentiel, avec les expressions du se-

---

que nous appelons Ω, du corps ou de la portion de corps que nous considérons, nous avons, pour tout ce corps ou cette portion, l'équation d'équilibre ou de nullité du travail virtuel total :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\iiint \rho\, dx\, dy\, dz\,(X\,\delta u + Y\,\delta v + Z\,\delta w) + \\ &+ \int d\Omega\,[\varpi\cos(\varpi, x)\,\delta u + \varpi\cos(\varpi, y)\,\delta v + \varpi\cos(\varpi, z)\,\delta w] = \\ &= \iiint dx\, dy\, dz\,\delta\Phi. \end{aligned}\right.$$

Mettant pour Φ sa valeur (9) en u, v, w, comme nous venons de dire, en conservant dans tous les termes les produits du second ordre de leurs dérivées, puis effectuant la différentiation par δ et changeant les δd en $d\delta$, les termes en δu, qu'il suffit de considérer seuls parce qu'il sera facile d'en déduire par analogie les termes en δv, δw, fournissent, dans le second membre de cette équation (13) eu égard aux valeurs (1) des p^1,

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\iiint \left[p^0_{xx}\left(1+\frac{du}{dx}\right) + p^0_{xy}\frac{du}{dy} + p^0_{zx}\frac{du}{dz} + p^1_{xx}\right]\frac{d\delta u}{dx}\, dx\, dy\, dz \\ &+ \iiint \left[p^0_{xy}\left(1+\frac{du}{dx}\right) + p^0_{yy}\frac{du}{dy} + p^0_{yz}\frac{du}{dz} + p^1_{xy}\right]\frac{d\delta u}{dy}\, dx\, dy\, dz \\ &+ \iiint \left[p^0_{zx}\left(1+\frac{du}{dx}\right) + p^0_{yz}\frac{du}{dy} + p^0_{zz}\frac{du}{dz} + p^1_{zx}\right]\frac{d\delta u}{dz}\, dx\, dy\, dz. \end{aligned}\right.$$

Avant d'intégrer par parties de manière à détacher trois intégrales doubles et à ne conserver sous les signes $\int$ que δu non différentié, il faut remarquer, avec M. Charles Neumann, de Halle, qui a donné une analyse de ce genre pour le cas particulier de l'isotropie (*Zur Theorie der Elasticität*, au *Journal de Crelle*, LVIIe cahier, 1860, p. 281), qu'il convient de faire ces intégrations pour le *nouveau volume*

$$\iiint dx_1\, dy_1\, dz_1$$

qu'occupe le corps depuis les déplacements, et changer par conséquent, au moins dans les facteurs hors des trois crochets, les variables x, y, z dans x_1, y_1, z_1 prises à leur tour comme indépendantes. Cela exige qu'on remplace :

1° $dx\,dy\,dz$ par $dx_1\,dy_1\,dz_1$ multiplié par un déterminant sextinôme $\frac{dx}{dx_1}\,\frac{dy}{dy_1}\,\frac{dz}{dz_1}$ — ... (Lacroix, *Calcul différentiel*, t. II, p. 207, n° 531) qui n'est autre chose que le rap-

cond degré (3) à la place des $\mathfrak{d}_x, \ldots g_{yz}, \ldots$ dans le sextinôme en p^0,

---

port du volume ancien au volume nouveau d'un même élément, et qu'on peut réduire à son premier terme

$$\left(1-\frac{du}{dx_1}\right)\left(1-\frac{dv}{dy_1}\right)\left(1-\frac{dw}{dz_1}\right)=1-\frac{du}{dx_1}-\frac{dv}{dy_1}-\frac{dw}{dz_1},$$

vu que tous les autres termes sont du deuxième et du troisième ordre en u, v, w.

$$2^\circ\ \frac{d\delta u}{dx} \text{ par } \frac{d\delta u}{dx_1}\frac{dx_1}{dx}+\frac{d\delta u}{dy_1}\frac{dy_1}{dx}+\frac{d\delta u}{dz_1}\frac{dz_1}{dx}=\frac{d\delta u}{dx_1}\left(1+\frac{du}{dx}\right)+\frac{d\delta u}{dy_1}\frac{dv}{dx}+\frac{d\delta u}{dz_1}\frac{dw}{dx},$$

$$\text{et de même}\begin{cases}\dfrac{d\delta u}{dy} \text{ par } \dfrac{d\delta u}{dx_1}\dfrac{du}{dy}+\dfrac{d\delta u}{dy_1}\left(1+\dfrac{dv}{dy}\right)+\dfrac{d\delta u}{dz_1}\dfrac{dw}{dy},\\[2ex] \dfrac{d\delta u}{dz} \text{ par } \dfrac{d\delta u}{dx_1}\dfrac{du}{dz}+\dfrac{d\delta u}{dy_1}\dfrac{dv}{dz}+\dfrac{d\delta u}{dz_1}\left(1+\dfrac{dw}{dz}\right).\end{cases}$$

Faisant cette substitution et effectuant les multiplications des polynômes entre crochets par les neuf facteurs $1+\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \frac{dw}{dx}, \frac{du}{dy}$, etc., et aussi par $1-\frac{du}{dx_1}-\frac{dv}{dy_1}-\frac{dw}{dz_1}$ qu'on peut remplacer par $1-\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dy}-\frac{dw}{dz}$ puisqu'on néglige les quantités du second ordre en u, v, w, l'expression (14) devient

$$\int\!\!\int\!\!\int \mathrm{A}\frac{d\delta u}{dx_1}dx_1\,dy_1\,dz_1+\int\!\!\int\!\!\int \mathrm{B}\frac{d\delta u}{dy_1}dx_1\,dy_1\,dz_1+\int\!\!\int\!\!\int \mathrm{C}\frac{d\delta u}{dz_1}dx_1\,dy_1\,dz_1,$$

en faisant

$$\mathrm{A}=p^0_{xx}\left(1+\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dy}-\frac{dw}{dz}\right)+2p^0_{xy}\frac{du}{dy}+2p^0_{zx}\frac{du}{dz}+p^1_{xx},$$

$$\mathrm{B}=p^0_{xy}\left(1-\frac{dw}{dz}\right)+p^0_{xx}\frac{dv}{dx}+p^0_{yy}\frac{du}{dy}+p^0_{yz}\frac{du}{dz}+p^0_{zx}\frac{dv}{dz}+p^1_{xy},$$

$$\mathrm{C}=p^0_{zx}\left(1-\frac{dv}{dy}\right)+p^0_{zz}\frac{du}{dz}+p^0_{zx}\frac{dw}{dx}+p^0_{xy}\frac{dw}{dy}+p^0_{yz}\frac{du}{dy}+p^1_{zx}.$$

Intégrant par parties et désignant par les accents ′ et ″ les valeurs de A, ou B, ou C, et de δu, relatives aux deux points où l'enveloppe du corps est traversée par des droites respectivement parallèles aux x, aux y, aux z servant d'axes aux parallélipipèdes tronqués infiniment déliés dont les sections droites sont $dy_1\,dz_1$, $dz_1\,dx_1$, $dx_1\,dy_1$,

peut, au reste, être obtenue directement et facilement, en admettant la

---

elle se change en

$$
(15)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int\!\!\int dy_1\,dz_1\,(A''\delta u'' - A'\delta u') + \int\!\!\int dz_1\,dx_1\,(B''\delta u'' - B'\delta u') \\
&\quad + \int\!\!\int dx_1\,dy_1\,(C''\delta u'' - C'\delta u') - \int\!\!\int\!\!\int dx_1\,dy_1\,dz_1 \times \\
&\quad \times \left\{\begin{aligned}
&p^0_{xx}\frac{d^2u}{dx\,dx_1} + p^0_{yy}\frac{d^2u}{dy\,dy_1} + p^0_{zz}\frac{d^2u}{dz\,dz_1} + \\
&+ p^0_{yz}\left(\frac{d^2u}{dy\,dz_1} + \frac{d^2u}{dz\,dy_1}\right) + p^0_{zx}\left(\frac{d^2u}{dz\,dx_1} + \frac{d^2u}{dx\,dz_1}\right) + p^0_{xy}\left(\frac{d^2u}{dx\,dy_1} + \frac{d^2u}{dy\,dx_1}\right) \\
&\quad + \frac{dp^1_{xx}}{dx_1} + \frac{dp^1_{xy}}{dy_1} + \frac{dp^1_{zx}}{dz_1}
\end{aligned}\right\}\delta u.
\end{aligned}\right.
$$

Les trois intégrales doubles peuvent, par une transformation facile et d'ailleurs bien connue (Lagrange, *Mécanique analytique*, I, vii, n° 30, ou Lamé, *Leçons sur l'Élasticité*, § 10, p. 22), être remplacées par des intégrales simples relatives à toute la surface enveloppe, en sorte que si n désigne la normale élevée extérieurement à cette surface, les trois premiers termes de l'expression (15) peuvent être écrits

$$\int d\Omega\cos(n, x)\,A\delta u + \int d\Omega\cos(n, y)\,B\delta u + \int d\Omega\cos(n, z)\,C\delta u.$$

Il en résulte, en comparant avec la partie du $\int d\Omega$ de l'équation (13) affectée de δu:

$$\varpi\cos(\varpi, x) = A\cos(n, x) + B\cos(n, y) + C\cos(n, z).$$

Or la pression $\varpi\,d\Omega$ sur la face $d\Omega$ étant, comme on sait, en vertu du théorème qu'on déduit de l'équilibre du tétraèdre élémentaire (et qui pourrait être déduit de considérations comme celles-ci), résultante de celles que supportent ses trois projections $d\Omega\cos(n, x)$, $d\Omega\cos(n, y)$, $d\Omega\cos(n, z)$ sur des plans très-voisins, perpendiculaires aux x, y, z, l'on a, en décomposant tout parallèlement aux x,

$$\varpi\cos(\varpi, x) = p_{xx}\cos(n, x) + p_{xy}\cos(n, y) + p_{zx}\cos(n, z);$$

ces deux expressions de $\varpi\cos(\varpi, x)$ devant être égales quels que soient les angles (n, x), (n, y), (n, z), on a

$$p_{xx} = A, \quad p_{xy} = B, \quad p_{zx} = C,$$

loi des actions moléculaires, sans passer par l'établissement des for-

---

c'est-à-dire les expressions (10) qui se trouvent, ainsi, autrement démontrées, comme on se le proposait, que par le calcul des actions moléculaires.

Il est bon d'observer que si l'on n'avait pas changé, comme M. Neumann, dans $\int\int\int dx\,dy\,dz\,\delta\Phi$, les variables x, y, z pour celles x_1, y_1, z_1, ou transformé l'expression (14) en l'expression (15), on aurait trouvé l'égalité des quadrinômes entre crochets de l'expression (14) à trois certaines forces, que nous pouvons appeler $P_{x''x}$, $P_{y''x}$, $P_{z''x}$, composantes suivant x des pressions, non pas sur les faces d'une superficie $= 1$ et actuellement perpendiculaires aux axes coordonnés, mais sur des faces légèrement obliques qui ont eu primitivement ces directions et cette grandeur, changée maintenant, en raison des trois dilatations $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dw}{dz}$ de leurs dimensions, dans les grandeurs respectives suivantes

$$\left(1+\frac{dv}{dy}\right)\left(1+\frac{dw}{dz}\right),\quad \left(1+\frac{dw}{dz}\right)\left(1+\frac{du}{dx}\right),\quad \left(1+\frac{du}{dx}\right)\left(1+\frac{dv}{dy}\right).$$

On arrive toujours au même résultat pour p_{xx}, p_{xy}, p_{zx} en transformant $P_{x''x}$, $P_{y''x}$, $P_{z''x}$ comme a fait Poisson (aux pages 47-52 de son Mémoire inséré au 20e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*); c'est-à-dire en remarquant que si x', y', z' désignent les directions des intersections de ces trois faces deux à deux, et si l'on écrit, pour abréger, $c_{x'x}$ pour $\cos(x', x)$ et ainsi des autres, l'on a (4e note du n° 2)

$$\begin{array}{lll} c_{x'x} = 1, & c_{x'y} = \frac{dv}{dx}, & c_{x'z} = \frac{dw}{dx}; \\ c_{y'x} = \frac{du}{dy}, & c_{y'y} = 1, & c_{y'z} = \frac{dw}{dy}; \\ c_{z'x} = \frac{du}{dz}, & c_{z'y} = \frac{dv}{dz}, & c_{z'z} = 1; \end{array}$$

d'où facilement, x'', y'', z'' étant les directions des normales aux mêmes trois faces, c'est-à-dire x'' étant perpendiculaire à y' et z', y'' à z' et x', z'' à x' et y',

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{lll} c_{x''x} = 1, & c_{x''y} = -\frac{du}{dy}, & c_{x''z} = -\frac{du}{dz}; \\ c_{y''x} = -\frac{dv}{dx}, & c_{y''y} = 1, & c_{y''z} = -\frac{dv}{dz}; \\ c_{z''x} = -\frac{dw}{dx}, & c_{z''y} = -\frac{dw}{dy}, & c_{z''z} = 1; \end{array}\right.$$

mules des pressions, si l'on opère comme ont fait, depuis Navier, qui a ouvert cette voie, M. Haughton [*] et M. Ch. Neumann (Mémoire cité) en généralisant leur analyse [**].

---

et, par suite, en projetant chacune de ces trois faces légèrement obliques sur les plans coordonnés rectangulaires yz, zx, xy et invoquant, comme tout à l'heure, l'équilibre du tetraèdre

$$P_{x''x} = \left(1 + \frac{dv}{dy}\right)\left(1 + \frac{dw}{dz}\right)\left(p_{xx} - p_{xy}\frac{du}{dy} - p_{zx}\frac{du}{dz}\right),$$

$$P_{y''x} = \left(1 + \frac{dw}{dz}\right)\left(1 + \frac{du}{dx}\right)\left(-p_{xx}\frac{dv}{dx} + p_{xy} - p_{zx}\frac{dv}{dz}\right),$$

$$P_{z''x} = \left(1 + \frac{du}{dx}\right)\left(1 + \frac{dv}{dy}\right)\left(-p_{xx}\frac{dw}{dx} - p_{xy}\frac{dw}{dy} + p_{zx}\right).$$

En égalant ces expressions aux trois polynômes entre crochets de l'expression (14), et divisant par les facteurs binômes $\left(1 + \frac{dv}{dy}\right)$, etc., les deux membres des équations qui en résultent, on tire immédiatement

$$p_{xx},\ p_{xy},\ p_{zx} = \text{les trois polynômes A, B, C,}$$

ou trois des expressions à démontrer, équations (10), sans avoir à résoudre d'équations à trois inconnues p_{xx}, p_{xy}, p_{zx}, puisque l'on peut, en négligeant les produits des dérivées de u, v, w, remplacer, dans les termes qui en sont affectés, les p_{xx}, p_{xy}, p_{zx} par $P_{x''x}$, $P_{y''x}$, $P_{z''x}$ et conséquemment par p^0_{xx}, p^0_{xy}, p^0_{zx}.

[*] *On Equilibrium and Motion of solid and fluid Bodies*, lu le 25 mai 1846 (*Trans. of Irish Academy*, vol. XXI).

[**] En effet, le potentiel de l'action, sur une molécule unique m, des molécules environnantes m dont les distances $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (notations ci-dessus) sont devenues r_1, est, si l'on fait pour un moment $\int_r^{r_1} fr_1\, dr_1 = \varphi(r_1)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{m}\,\mathbf{S}\, m\,\varphi(r_1) &= \mathrm{m}\,\mathbf{S}\, m\left[\varphi(r) + (r_1 - r)\,\varphi'(r) + \frac{(r_1 - r)^2}{2}\,\varphi''(r)\right] \\ &= \mathrm{m}\,\mathbf{S}\, m\left[\qquad (r_1 - r)fr + \frac{(r_1 - r)^2}{2}\,\frac{dfr}{dr}\right]. \end{aligned}$$

On voit aussi, par les expressions (10) de p_{xx}, etc., que c'est seulement quand les pressions primitives p^0_{xx}, etc., n'excèdent pas, pour

---

Or

$$r_1 - r = -r + [(x+\Delta u)^2 + (y+\Delta v)^2 + (z+\Delta w)^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2} r \frac{2x\Delta u + 2y\Delta v + 2z\Delta w + (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta w)^2}{r^2} +$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2} \cdot r \cdot \left(\frac{2x\Delta u + 2y\Delta v + 2z\Delta w}{r^2}\right)^2 :$$

d'où, vu que $-\frac{fr}{2r^2} + \frac{1}{2r}\frac{dfr}{dr} = \frac{1}{2}\frac{d\frac{fr}{r}}{dr}$,

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} m\,\mathbf{S}\, m \int_r^{r_1} fr_1\, dr_1 = m\,\mathbf{S}\, m \Big\{ \frac{fr}{r}\left[x\Delta u + y\Delta v + z\Delta w + \frac{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta w)^2}{2}\right] + \\ + \frac{1}{2r}\frac{d\frac{fr}{r}}{dr}(x\Delta u + y\Delta v + z\Delta w)^2 \Big\}. \end{aligned} \right.$$

On en déduit le potentiel Φ des actions moléculaires *mutuelles* de l'unité de volume, en multipliant par la densité ρ, après avoir divisé par *deux fois* la masse de la molécule m parce que la même force fr est relative à deux molécules qui l'exercent l'une sur l'autre. Mettant ensuite pour Δu, Δv, Δw leurs valeurs $\frac{du}{dx}x + \frac{du}{dy}y + \frac{du}{dz}z$, $\frac{dv}{dx}x + \ldots$ de la 2e note du n° 3, effectuant les multiplications et faisant passer hors des signes $\mathbf{S}$ les dérivées de u, v, w et leurs produits du second degré, l'on a, vu les notations (11),

$$\frac{\rho}{2}\,\mathbf{S}\, m \frac{fr}{r} x^2 = p^0_{xx}, \ldots,$$

et, vu les notations (12),

$$\frac{\rho}{2}\,\mathbf{S}\, m \frac{1}{r}\frac{d\frac{fr}{r}}{dr} x^4 = a_{xxxx}, \ldots,$$

précisément l'expression (9) du potentiel Φ en mettant pour Φ^1 son développement (6), et, pour ∂_x, ∂_y,..., g_{xy}, dans les termes en p^0, les expressions *complètes* (3) de ces dilatations et glissements posées sans négliger les carrés et produits du second degré.

Il est remarquable qu'on arrive ainsi à ces expressions (3) d'une manière si différente de celle de la 4e note du n° 2. C'est une preuve de plus de la fécondité de la considération du potentiel, si bien liée à l'emploi des méthodes de la Mécanique analytique.

l'ordre des grandeurs, les p^1_{xx}, etc., qui seraient dues aux seuls déplacements, c'est-à-dire dans les cas les plus ordinaires des solides terrestres, où l'on peut prendre simplement $p_{xx} = p^0_{xx} + p^1_{xx}$ et ainsi des autres composantes de pressions, que ces six composantes sont les dérivées d'une même fonction Φ par rapport aux six variables ∂_x, $\partial_y, \ldots, g_{xy}$. Dans les cas où les p^0 excèdent beaucoup les p^1, l'on n'aurait, en différentiant ainsi cette fonction, que des expressions incomplètes de $p_{xx}, \ldots, p_{xy}$.

Et ce n'est que dans le cas particulier de la contexture isotrope, seul considéré par M. Neumann, que les mêmes composantes de pression peuvent être les dérivées d'une même fonction par rapport aux neuf coefficients différentiels $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \ldots, \frac{dw}{dz}$ [*].

4. *Équations de l'équilibre où entrent aussi les coefficients* a_{xxxx}, *etc.*, *et les pressions primitives* p^0_{xx}, *etc.* — Ces équations *indéfinies*, ou à satisfaire en tous les points du corps, s'obtiennent par divers moyens. Il est important de les mentionner pour montrer leur accord, en ce qui regarde surtout la partie affectée des pressions primitives p^0_{xx}, etc., qu'on omet souvent, mais dont nous devons mettre ici la forme hors

---

[*] Cette fonction, indiquée par M. Neumann, est le potentiel augmenté de l'expression suivante, dans laquelle p_0 représente les valeurs de p^0_{xx}, p^0_{yy}, p^0_{zz}, ou la pression primitive égale en tous sens dans le cas de l'isotropie (où p^0_{yz}, p^0_{zx}, p^0_{xy} sont nuls)

$$p_0\left(\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz} + \frac{dw}{dx}\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dz}\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}\right).$$

Aucune expression plus générale ne nous paraît pouvoir être ajoutée au potentiel pour avoir, avec une contexture non isotrope (même symétrique par rapport à trois plans), une fonction de $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \ldots, \frac{dw}{dz}$ qui donne les composantes $p_{xx}, p_{yy}, \ldots, p_{xy}, p_{yz}$ quand on la différentie par rapport à ses neuf variables. Nous pensons donc que l'analyse, du reste large et remarquable, donnée par le savant M. Haughton dans son deuxième écrit, du 18 janvier 1849 (*A Classification of elastic Media*, *Trans. of Irish Academy*, vol. XXII), où il semble concéder à MM. Green et Mac-Cullagh qu'on peut se passer de la loi des actions moléculaires très-bien employée par lui précédemment dans son beau Mémoire de mai 1846 déjà cité, ne peut bien s'appliquer qu'aux deux cas dont nous parlons : *pressions primitives peu considérables*, et *isotropie*.

de doute dans la vue de l'application que nous aurons à en faire au § IV, afin de bien établir qu'il ne faut point chercher dans l'existence possible de ces pressions un expédient pour mettre les résultats du calcul des vibrations lumineuses d'accord avec une hypothèse que tout porte au contraire à abandonner.

Le premier moyen consiste donc à substituer dans les équations générales de l'équilibre d'un élément parallélipipède intérieur, qui sont :

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{yx}}{dy}+\frac{dp_{zx}}{dz}+\rho X=0,\\ &\frac{dp_{xy}}{dx}+\frac{dp_{yy}}{dy}+\frac{dp_{zy}}{dz}+\rho Y=0,\\ &\frac{dp_{xz}}{dx}+\frac{dp_{yz}}{dy}+\frac{dp_{zz}}{dz}+\rho Z=0,\end{aligned}\right.$$

les expressions (10) des composantes de pression p_{xx}, etc., que nous avons obtenues *de deux manières*, dont une se fondait uniquement sur leur *linéarité* supposée admise, sans invoquer autrement et explicitement la loi contestée des actions moléculaires. Le résultat de cette substitution est la destruction des termes négatifs en p^0, d'où ces équations d'équilibre

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} -\rho X = {} & p^0_{xx}\frac{d^2u}{dx^2}+p^0_{yy}\frac{d^2u}{dy^2}+p^0_{zz}\frac{d^2u}{dz^2}+2p^0_{yz}\frac{d^2u}{dy\,dz}+2p^0_{zx}\frac{d^2u}{dz\,dx}+2p^0_{xy}\frac{d^2u}{dx\,dy}\\ & +a_{xxxx}\frac{d^2u}{dx^2}+a_{xyxy}\frac{d^2u}{dy^2}+a_{zxzx}\frac{d^2u}{dz^2}\\ & +2a_{zxxy}\frac{d^2u}{dy\,dz}+2a_{xxzx}\frac{d^2u}{dz\,dx}+2a_{xxxy}\frac{d^2u}{dx\,dy}\\ & +a_{xxxy}\frac{d^2v}{dx^2}+a_{xyyy}\frac{d^2v}{dy^2}+a_{zxyz}\frac{d^2v}{dz^2}\\ & +(a_{xyyz}+a_{zxyy})\frac{d^2v}{dy\,dz}+(a_{xxyz}+a_{zxxy})\frac{d^2v}{dz\,dx}+(a_{xxyy}+a_{xyxy})\frac{d^2v}{dx\,dy}\\ & +a_{xxzx}\frac{d^2w}{dx^2}+a_{xyyz}\frac{d^2w}{dy^2}+a_{zxzz}\frac{d^2w}{dz^2}\\ & +(a_{zxyz}+a_{xyzz})\frac{d^2w}{dy\,dz}+(a_{xxzz}+a_{zxzx})\frac{d^2w}{dz\,dx}+(a_{xxyz}+a_{xyzx})\frac{d^2w}{dx\,dy};\\ -\rho Y = {} & \end{aligned}\right.$$

$$(19)\ \text{(suite)}\quad \left\{\begin{aligned} -\rho Y &= p^0_{xx}\frac{d^2v}{dx^2} + p^0_{yy}\frac{d^2v}{dy^2} + \ldots + 2p^0_{xy}\frac{d^2v}{dx\,dy} \\ &\quad + a_{xyxx}\frac{d^2u}{dx^2} + \ldots + a_{xyxy}\frac{d^2v}{dx^2} + \ldots + a_{xyzx}\frac{d^2w}{dx^2} + \ldots; \\ -\rho Z &= p^0_{xx}\frac{d^2w}{dx^2} + p^0_{yy}\frac{d^2w}{dy^2} + \ldots + 2p^0_{xy}\frac{d^2w}{dx\,dy} \\ &\quad + a_{zxxx}\frac{d^2u}{dx^2} + \ldots + a_{zxxy}\frac{d^2v}{dx^2} + \ldots + a_{zxzx}\frac{d^2w}{dx^2} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

On arrive aussi à ces équations directement, comme a fait M. Cauchy, sans passer par la considération des pressions, en posant, comme Navier, les conditions de l'équilibre d'un seul des points matériels du système solide, supposé sollicité, suivant la loi énoncée, par les actions des points environnants [*].

Mais un troisième moyen qui dispense, comme le premier, de mettre en œuvre cette loi contestée des actions, consiste à se servir de l'expression (9) du potentiel

$$\Phi = \Phi^0 + p^0_{xx}\,\partial_x + \ldots + \frac{1}{2}a_{xxxx}\,\partial_x^2 + \ldots,$$

---

[*] En effet, m désignant les masses de ces derniers points, les équations d'équilibre qui dans l'état primitif étaient, vu que $\frac{x}{r} = \cos(r, x)$, $\frac{y}{r} = \ldots$, toujours avec les notations du n° 3 (2e note),

$$(20)\qquad \mathrm{S}\, m\frac{x}{r}fr = 0,\quad \mathrm{S}\, m\frac{y}{r}fr = 0,\quad \mathrm{S}\, m\frac{z}{r}fr = 0,$$

sont, dans l'état ultérieur,

$$(21)\quad \mathrm{S}\, mfr_1\frac{x+\Delta u}{r_1} + X = 0,\quad \mathrm{S}\, mfr_1\frac{y+\Delta v}{r_1} + Y = 0,\quad \mathrm{S}\, mfr_1\frac{z+\Delta w}{r_1} + Z = 0.$$

Mettant, comme dans la même note, pour $\frac{fr_1}{r_1}$ sa valeur

$$\frac{fr}{r} + (x\Delta u + y\Delta v + z\Delta w)\frac{1}{r}\frac{d\frac{fr}{r}}{dr},$$

puis pour Δu, Δv, Δw leurs développements en x, y, z par le théorème de Taylor à

soit qu'on admette à priori avec Green sa composition en une somme de deux fonctions homogènes entières, l'une du premier, l'autre du second degré en $\partial_x, \partial_y, \ldots, g_{xy}$, soit qu'on le déduise des pressions en admettant aussi à priori la forme linéaire de celles-ci, deux partis entre lesquels doivent nécessairement choisir leur point de départ ceux qui refusent d'invoquer la grande loi physique en question.

En effet, en posant, comme à la quatrième note du n° 3, l'équation (13) des travaux virtuels, et en la développant, l'assimilation des parties affectées de δu dans les intégrales triples des deux membres

---

trois variables, qui peuvent être écrits symboliquement

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta u &= \left(\mathrm{x}\frac{d}{dx} + \mathrm{y}\frac{d}{dy} + \mathrm{z}\frac{d}{dz}\right)u + \frac{1}{1.2}\left(\mathrm{x}\frac{d}{dx} + \mathrm{y}\frac{d}{dy} + \mathrm{z}\frac{d}{dz}\right)^2 u \\ &\qquad + \frac{1}{1.2.3}\left(\mathrm{x}\frac{d}{dx} + \mathrm{y}\frac{d}{dy} + \mathrm{z}\frac{d}{dz}\right)^3 u + \ldots, \\ \Delta v &= \ldots, \\ \Delta w &= \ldots, \end{aligned}\right.$$

et dans lesquels il suffit ici de considérer, non plus seulement les termes du premier ordre, comme à la note citée relative au calcul des pressions, mais aussi ceux du second ordre, tels que $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\mathrm{x}^2 + \ldots + 2\frac{d^2u}{dxdy}\mathrm{xy}\right)$, l'on obtient trois équations, où les dérivées du premier ordre sont affectées de sommes $\mathrm{S}m\frac{fr}{r}$ (x ou y ou z), nulles d'après les équations (20), et de sommes telles que $\mathrm{S}\frac{m}{r}\frac{d\frac{fr}{r}}{dr}$ (x^3 ou $\mathrm{x}^2\mathrm{y}$ ou xyz), également relatives à l'état primitif, et que l'on doit aussi, avec Cauchy, regarder comme nulles ou négligeables parce que, ne contenant que des produits du troisième degré des petites lignes x, y, z, elles se composent de termes qui se détruisent deux à deux, ou rigoureusement ou avec toute l'approximation désirable si le corps était primitivement, comme on le suppose, ou homogène, ou d'une contexture ne variant que graduellement et fort peu dans une étendue imperceptible (supposition implicitement faite dans la note du n° 3). Restent les termes du second ordre, ou restent précisément, en multipliant par la densité ρ, les équations (19).

On sait que M. Cauchy a considéré et appliqué, dans la théorie de la lumière, spécialement pour expliquer la dispersion, d'autres équations, où tous les termes des développements (22) sont conservés jusqu'à l'infini.

de cette équation conduit à

$$-\rho X = \{\text{le polynôme de l'accolade de (15)}\}.$$

Or ce polynôme où l'on peut, à cela près de produits négligeables, remplacer, comme on a déjà dit, ainsi que dans $dx_1\, dy_1\, dz_1$ qui le multiplie, x_1, y_1, z_1 par x, y, z, est précisément le second membre de la première équation d'équilibre (19).

Il est remarquable qu'on arrive encore à cette même première équation (19) si l'on fait les intégrations par parties de (14) sans changer les variables indépendantes x, y, z en x_1, y_1, z_1; ou si l'on substitue dans la première équation (18) $\frac{dp_{xx}}{dx} + \ldots + \rho X = 0$ les trois quadrinômes entre crochets de (14) à la place de p_{xx}, p_{xy}, p_{zx}, dont ils diffèrent comme on a vu. Cette concordance singulière vient de ce qu'on peut tout aussi bien poser les équations indéfinies de l'équilibre en considérant un élément parallélipipède *obliquangle*, qu'en considérant un élément parallélipipède rectangle.

§ III. — *Formule symbolique générale fournissant, en fonction des coefficients d'élasticité pour des axes donnés, ceux qui sont relatifs à d'autres axes aussi donnés et rectangulaires, et, aussi, les coefficients qui doivent entrer dans l'expression d'une composante quelconque de pression même oblique.*

3. *Moyens d'obtenir les coefficients nouveaux.* — Abstrayons, dans tout ce paragraphe et le suivant, les pressions p^0_{xx}, etc., antérieures aux déplacements, ou prenons pour

$$p_{xx}, \quad p_{yy}, \ldots, \quad p_{xy}$$

les valeurs (1) de

$$p^1_{xx}, \quad p^1_{yy}, \ldots, \quad p^1_{xy}.$$

Si

$$x', \quad y', \quad z'$$

désignent les directions de nouveaux axes coordonnés, rectangulaires comme les anciens x, y, z, les composantes, parallèlement à x', y', z', des pressions sur les plans perpendiculaires à ces coordonnées, seront

exprimées par ces formules, semblables à (1),

$$(3)\qquad \begin{cases} p_{x'x'} = a_{x'x'x'x'}\,\delta_{x'} + \ldots + a_{x'x'x'y'}\,g_{x'y'}, \\ p_{y'y'} = a_{y'y'x'x'}\,\delta_{x'} + \ldots, \text{ etc.}, \quad p_{x'y'} = \ldots. \end{cases}$$

Et les mêmes coefficients nouveaux $a_{x'x'x'x'}$, etc., entreraient, soit dans l'expression nouvelle du potentiel

$$\Phi$$

toujours égal à lui-même ou ayant une valeur indépendante des axes, soit dans les équations d'équilibre exprimées en fonction des déplacements u', v', w' suivant les directions x', y', z'.

Nous cherchons à avoir ces vingt et un coefficients $a_{x'x'x'x'}$, $a_{x'x'y'y'}$, etc. en fonction des vingt et un anciens a_{xxxx}, etc., et des neuf cosinus $\cos(x, x')$, $\cos(y, x')$, ..., $\cos(z, z')$, que nous désignerons, pour abréger, par

$$c_{xx'},\ c_{yx'},\ c_{zx'};\ c_{xy'},\ c_{yy'},\ c_{zy'};\ c_{xz'},\ c_{yz'},\ c_{zz'}.$$

On peut y arriver à l'aide de cette branche d'analyse qui a été fort cultivée dans ces dernières années sous le nom de *calcul des formes*, ou bien des *transformations linéaires*, applicables surtout aux fonctions homogènes du premier et du second degré, car x, y, z, u, v, w sont fonctions linéaires de x', y', z', u', v', w', et réciproquement.

Mais nous pouvons trouver ces expressions, et même d'autres plus générales, sans cela, et en nous dispensant même de mettre à la place des dilatations et glissements δ, g des fonctions des coefficients différentiels des déplacements u, v, etc.

En effet, en appelant en général

$$\mathrm{n}$$

la *direction de la normale* à un plan nouveau sur lequel on veut prendre la pression, et

$$\mathrm{s}$$

la *direction de décomposition*, suivant laquelle on désire avoir la composante ou la projection de la pression que ce plan supporte, on

a, avec nos notations, n et s étant ou deux des directions nouvelles x', y', z', ou même deux directions obliques quelconques,

$$(24)\quad p_{ns} = a_{nsx'x'}\partial_{x'} + a_{nsy'y'}\partial_{y'} + a_{nsz'z'}\partial_{z'} + a_{nsy'z'}g_{y'z'} + a_{nsz'x'}g_{z'x'} + a_{nsx'y'}.$$

Or la formule générale de changement de plan de pression donne, avec notre manière ci-dessus de désigner les cosinus,

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} p_{ns} = {} & p_{xx}c_{nx}c_{sx} + p_{yy}c_{ny}c_{sy} + p_{zz}c_{nz}c_{sz} + p_{yz}(c_{ny}c_{sz} + c_{nz}c_{sy}) \\ & + p_{zx}(c_{nz}c_{sx} + c_{nx}c_{sz}) + p_{xy}(c_{nx}c_{sy} + c_{ny}c_{sx})\ [*]. \end{aligned}\right.$$

Mettons-y pour $p_{xx}, p_{yy}, \ldots, p_{xy}$ les expressions (1)

$$a_{xxxx}\partial_x + \ldots + a_{xxxy}g_{xy}, \quad a_{yyxx}\partial_x + \ldots, \quad \text{etc.},$$

et ensuite, pour les dilatations et glissements $\partial_x, \partial_y, \ldots, g_{xy}$, dans le sens des anciens axes, leurs valeurs suivantes en fonction des dilatations et glissements dans le sens des nouveaux, et qui s'obtiennent par des considérations purement géométriques et *indépendantes des grandeurs des déplacements u, v, w des points du corps dans l'espace*,

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \partial_x = {} & \partial_{x'}c^2_{xx'} + \partial_{y'}c^2_{xy'} + \partial_{z'}c^2_{xz'} + g_{y'z'}c_{xy'}c_{xz'} + g_{z'x'}c_{xz'}c_{xx'} \\ & + g_{x'y'}c_{xx'}c_{xy'}, \\ \partial_y = {} & \partial_{x'}c^2_{yx'} + \partial_{y'}c^2_{yy'} + \partial_{z'}c^2_{yz'} + g_{y'z'}c_{yy'}c_{yz'} + g_{z'x'}c_{yz'}c_{yx'} \\ & + g_{x'y'}c_{yx'}c_{yy'}, \\ \partial_z = {} & \partial_{x'}c^2_{zx'} + \partial_{y'}c^2_{zy'} + \partial_{z'}c^2_{zz'} + g_{y'z'}c_{zy'}c_{zz'} + g_{z'x'}c_{zz'}c_{zx'} \\ & + g_{x'y'}c_{zx'}c_{zy'}, \end{aligned}\right.$$

---

[*] Car comme la pression sur l'unité superficielle de cette face est résultante, d'après le théorème déduit de l'équilibre du tétraèdre, des pressions supportées par ses trois projections sur trois plans perpendiculaires aux x, aux y, aux z, et comme les superficies de celles-ci sont c_{nx}, c_{ny}, c_{nz}, les composantes de cette pression, suivant les trois coordonnées, sont respectivement

$$c_{nx}p_{xx} + c_{ny}p_{yx} + c_{nz}p_{zx}, \quad c_{nx}p_{xy} + c_{ny}p_{yy} + c_{nz}p_{zy}, \quad c_{nx}p_{xz} + c_{ny}p_{yz} + c_{nz}p_{zz},$$

qui ajoutées, après avoir été multipliées respectivement par c_{xs}, c_{ys}, c_{zs} pour obtenir la projection ou composante suivant s, donnent bien pour somme l'expression (25).

$$
(26)\ (\text{suite})\quad \left\{
\begin{aligned}
g_{yz} = {} & 2\partial_{x'} c_{yx'} c_{zx'} + 2\partial_{y'} c_{yy'} c_{zy'} + 2\partial_{z'} c_{yz'} c_{zz'} \\
& + g_{y'z'}(c_{yy'} c_{zz'} + c_{yz'} c_{zy'}) + g_{z'x'}(c_{yz'} c_{zx'} + c_{yx'} c_{zz'}) \\
& \qquad + g_{x'y'}(c_{yx'} c_{zy'} + c_{yy'} c_{zx'}), \\
g_{zx} = {} & 2\partial_{x'} c_{zx'} c_{xx'} + 2\partial_{y'} c_{zy'} c_{xy'} + 2\partial_{z'} c_{zz'} c_{xz'} \\
& + g_{y'z'}(c_{zy'} c_{xz'} + c_{zz'} c_{xy'}) + g_{z'x'}(c_{zz'} c_{xx'} + c_{zx'} c_{xz'}) \\
& \qquad + g_{x'y'}(c_{zx'} c_{zy'} + c_{zy'} c_{xx'}), \\
g_{xy} = {} & 2\partial_{x'} c_{xx'} c_{yx'} + 2\partial_{y'} c_{xy'} c_{yy'} + 2\partial_{z'} c_{xz'} c_{yz'} \\
& + g_{y'z'}(c_{xy'} c_{yz'} + c_{xz'} c_{yy'}) + g_{z'x'}(c_{xz'} c_{yx'} + c_{xx'} c_{yz'}) \\
& \qquad + g_{x'y'}(c_{xx'} c_{yy'} + c_{xy'} c_{yx'})\ [*].
\end{aligned}
\right.
$$

Cette substitution donnera une expression de p_{ns} en fonction linéaire des six déformations nouvelles $\partial_{x'}$, $\partial_{y'}$, $\partial_{z'}$, $g_{y'z'}$, $g_{z'x'}$, $g_{x'y'}$. Si on la com-

---

[*] On peut les tirer immédiatement de ce théorème connu (et employé en Mécanique quand on veut évaluer le travail d'une résultante de plusieurs forces pour un espace *résultant* de plusieurs autres espaces parcourus), que si l'on a deux lignes dont chacune est *résultante* géométrique de plusieurs autres lignes (ou deux *chemins directs* dont chacun unit ensemble les deux mêmes points qu'un *chemin polygonal*), le produit d'une de ces résultantes par la projection de la seconde sur sa direction est égal à la somme algébrique de tous les produits des composantes de l'une par les projections, sur leurs directions, des diverses composantes de l'autre.

En effet, en l'appliquant à deux lignes $r_1 = r(1+\partial_r)$, $s_1 = s(1+\partial_s)$, diagonales des deux parallélipipèdes obliquangles dans lesquels se sont changés deux parallélipipèdes rectangles dont les côtés adjacents étaient rc_{rx}, rc_{ry}, rc_{rz}, et sc_{sx}, sc_{sy}, sc_{sz}, et sont devenus $rc_{rx}(1+\partial_x)$, $rc_{ry}(1+\partial_y)$, ..., $sc_{sz}(1+\partial_z)$, on a, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} étant les cosinus des angles que font maintenant entre eux ces côtés, si l'on divise tout par rs :

$$
(27)\quad \left\{
\begin{aligned}
(1+\partial_r)(1+\partial_s)\cos(r_1, s_1) = {} & (1+\partial_x)^2 c_{rx} c_{sx} + (1+\partial_y)^2 c_{ry} c_{sy} + (1+\partial_z)^2 c_{rz} c_{sz} \\
& + (c_{ry} c_{sz} + c_{rz} c_{sy})(1+\partial_y)(1+\partial_z) g_{yz} \\
& + (c_{rz} c_{sx} + c_{rx} c_{sz})(1+\partial_z)(1+\partial_x) g_{zx} \\
& + (c_{rx} c_{sy} + c_{ry} c_{sx})(1+\partial_x)(1+\partial_y) g_{xy},
\end{aligned}
\right.
$$

équation qui donne successivement, à cela près de produits négligeables, la première et la quatrième, par exemple, des formules (26) en écrivant x', y', z' au lieu de x, y, z, et en prenant, 1° r_1 et s_1 de même direction x, 2° r, s à angle droit et dirigées suivant y et z, puis développant chaque fois et réduisant.

parait terme à terme avec l'équation (24) $a_{ns\,x'x'}\partial_{x'} + \ldots$, en égalant entre eux les coefficients des mêmes ∂ ou g, on aurait les formules désirées de tous les coefficients nouveaux $a_{ns\,x'x'}$, $a_{ns\,y'y'}, \ldots$, en fonction des vingt et un anciens $a_{xxxx}, \ldots$, qui s'y trouveraient multipliés par des puissances et des produits du quatrième degré des cosinus $c_{xx'}, \ldots$.

6. *Formule générale qui les donne.* — On abrége singulièrement le calcul et l'on arrive à quelque chose de fort simple au moyen de notations symboliques comme celles que plusieurs auteurs anglais appellent *Sylvestrian umbræ*, parce que M. Sylvester, qui les a employées avec succès, appelle *ombres de quantités* (*shadows of quantities*) [*] ces sortes de notations dont se sont servis précédemment, au reste, Cauchy et d'autres analystes.

Convenons donc que

$$a_{ij}, \quad p_i, \quad \varepsilon_i,$$

sont de purs symboles qui ne représentent aucune quantité, mais dont les produits, algébriquement formés, par des symboles de même espèce, lorsqu'on développe les produits de polynômes où ils entrent, représentent les quantités a, p et ∂, g ci-dessus, en sorte qu'en général

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{ll} a_{xx}a_{yy}, & a_{yz}a_{zx}, \ldots, \\ p_x p_x, & p_y p_z, \ldots, \end{array}\right\} \text{ sont la même chose que } \left\{\begin{array}{ll} a_{xxyy}, & a_{yzzx}, \ldots, \\ p_{xx}, & p_{yz}, \ldots, \end{array}\right. \\
\left.\begin{array}{l} \varepsilon_i\varepsilon_i \quad \text{ou} \quad \varepsilon_i^2, \\ 2\varepsilon_i\varepsilon_j \end{array}\right\} \text{ sont la même chose que } \left\{\begin{array}{l} \partial_i, \\ g_{ij}, \end{array}\right. \\
\text{et même (en poussant plus loin la décomposition que n'a fait M. Sylvester), que} \\
\quad a_i a_j \text{ est la même chose que le symbole } a_{ij}, \text{ et par conséquent} \\
\quad a_i a_j \,.\, a_k a_l \text{ est le coefficient } a_{ijkl}.
\end{array}\right.$$

---

[*] *On the Principle of the Calculus of Forms, in Cambridge and Dublin mathematical Journal*, vol. VII (XI *of Cambridge Journal*), 1852, p. 76.

A la fin d'un autre Mémoire (*Transactions of the Royal Society London*, 1853) se trouve, p. 543, une sorte de vocabulaire dans lequel M. Sylvester appelle *ombrale* une notation où ces quantités se trouvent représentées, dit-il, *par des syllabes* entre parenthèses, au lieu de l'être par de simples lettres, les deux lettres de ces syllabes étant appelées *quantités ombrales* ou *ombres*.

Alors les formules (1) des composantes de pression parallèles aux x, y, z peuvent s'écrire

$$(28)\qquad p_{xx \text{ ou } yz \text{ ou } \ldots} = a_{xx \text{ ou } yz \text{ ou } \ldots}(a_x\varepsilon_x + a_y\varepsilon_y + a_z\varepsilon_z)^2.$$

Substituant dans la formule de transformation (25),

$$p_{ns} = p_{xx}c_{nx}c_{sx} + \ldots,$$

on a le sextinôme de son second membre avec des a au lieu de p, et le facteur $(a_x\varepsilon_x + a_y\varepsilon_y + a_z\varepsilon_z)^2$ à la suite. Donc, comme cette formule (25) peut s'écrire

$$(29)\qquad p_{ns} = (p_x c_{nx} + p_y c_{ny} + p_z c_{nz})(p_x c_{sx} + p_y c_{sy} + p_z c_{sz}),$$

on a

$$p_{ns} = (a_x c_{nx} + a_y c_{ny} + a_z c_{nz})(a_x c_{sx} + a_y c_{sy} + a_z c_{sz}) \times$$
$$\times (a_x\varepsilon_x + a_y\varepsilon_y + a_z\varepsilon_z)^2.$$

Or les formules (26), exprimant les ∂ et g parallèles aux x, y, z en fonction des ∂ et g parallèles aux x', y', z', peuvent s'écrire

$$(30)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_x\varepsilon_x = (\varepsilon_{x'}c_{xx'} + \varepsilon_{y'}c_{xy'} + \varepsilon_{z'}c_{xz'})^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varepsilon_y\varepsilon_z = (\varepsilon_{x'}c_{yx'} + \varepsilon_{y'}c_{yy'} + \varepsilon_{z'}c_{yz'})(\varepsilon_{x'}c_{zx'} + \varepsilon_{y'}c_{zy'} + \varepsilon_{z'}c_{zz'}). \\ \quad \text{revenant, si } i \text{ représente l'une des directions } x,\ y,\ z, \text{ à} \\ \varepsilon_i = \varepsilon_{x'}c_{ix'} + \varepsilon_{y'}c_{iy'} + \varepsilon_{z'}c_{iz'}. \end{array}\right.$$

Remplaçant successivement i par x, y, z, et substituant dans la valeur précédente de p_{ns}, elle devient

$$(31)\qquad \left\{\begin{array}{l} p_{ns} = (a_x c_{nx} + a_y c_{ny} + a_z c_{nz})(a_x c_{sx} + a_y c_{sy} + a_z c_{sz}) \times \\ \quad \times [(a_x c_{xx'} + a_y c_{yx'} + a_z c_{zx'})\varepsilon_{x'} + (a_x c_{xy'} + a_y c_{yy'} + a_z c_{zy'})\varepsilon_{y'} \\ \qquad + (a_x c_{xz'} + a_y c_{yz'} + a_z c_{zz'})\varepsilon_{z'}]^2. \end{array}\right.$$

Mais l'expression (24) de p_{ns} en $\partial_{x'}, \ldots, g_{x'y'}$ peut s'écrire

$$(32)\qquad p_{ns} = a_n a_s (a_{x'}\varepsilon_{x'} + a_{y'}\varepsilon_{y'} + a_{z'}\varepsilon_{z'})^2.$$

Comparant ces deux expressions et examinant les termes qui seraient affectés, après qu'on les aurait développées, des mêmes puissances et produits des ε, c'est-à-dire des mêmes dilatations ou glissement $\delta_{x'}, \ldots, g_{x'y'}$, on reconnaît, sans effectuer le développement, qu'il en résulte des expressions des coefficients a nouveaux, toutes renfermées dans la formule symbolique suivante

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{nsx'y'} = a_n a_s \cdot a_{x'} a_{y'} \\ \quad \text{si} \\ a_i = a_x \cos(i,\ x) + a_y \cos(i,\ y) + a_z \cos(i,\ z), \\ \quad x' \text{ et } y' \text{ étant des directions prises parmi celles des coordonnées rectangles} \\ \quad\quad \text{nouvelles } x',\ y',\ z', \\ \quad n \text{ et } s \text{ étant, ou des directions prises aussi parmi celles de } x',\ y',\ z', \\ \quad\quad \text{ou deux autres directions absolument arbitraires,} \\ \quad i \text{ désignant l'une quelconque de ces quatre directions.} \end{array}\right.$$

Non-seulement cette formule fournit l'un quelconque des vingt et un coefficients $a_{x'x'x'x'}, a_{x'x'y'y'}, \ldots, a_{y'z'y'z'}, \ldots, a_{x'x'x'y'}, \ldots$, entrant soit dans les expressions de six composantes $p_{x'x'}, \ldots, p_{y'z'}, \ldots$, soit dans celle du potentiel Φ (numéro suivant) en fonction des *déformations élémentaires* $\delta_{x'}, \ldots, g_{y'z'}, \ldots$, soit dans les équations d'équilibre (19) $-\rho X' = a_{x'x'x'x'} \frac{d^2 u'}{dx'^2} + \ldots$, où ils affectent les dérivées successives de u', v', w'; mais *elle donne encore directement l'un de ceux, au nombre de trente-six, qui entreraient dans l'expression*, en fonction des mêmes $\delta_{x'}, \ldots, g_{y'z'}, \ldots$, *de la composante* p_{ns}, *suivant une direction arbitraire* s, *de la pression sur l'unité superficielle d'une petite face absolument quelconque*, ayant son centre en (x', y', z') et dont n représente en direction la normale arbitraire.

Le produit $a_n a_s \cdot a_{x'} a_{y'}$ des quatre trinômes symboliques de la forme $a_x c_{ix} + a_y c_{iy} + a_z c_{iz}$ doit être effectué dans l'ordre indiqué sans pouvoir faire d'autre interversion que celle des deux premiers facteurs entre eux et des deux derniers entre eux, si les directions n et s ne sont pas prises comme x' et y' parmi celles des trois axes rectangulaires x', y', z'.

Mais l'interversion des *deux premiers à la fois* avec les *deux derniers à la fois* est possible si n et s sont prises parmi celles-ci.

Et alors, l'interversion d'un des deux premiers facteurs avec un des deux derniers, et par conséquent de tous entre eux, sera permise si l'on admet le principe des actions moléculaires conduisant aux six égalités complémentaires (8), en réduisant les vingt et un coefficients a_{xxxx}, etc., à quinze (n° **2**).

7. *Autres manières d'arriver à la formule générale* (33). — On peut la déduire plus simplement de l'expression (6) du potentiel Φ', qui peut être écrite

$$\Phi' = \frac{1}{2}\left[(a_x\,\varepsilon_x + a_y\,\varepsilon_y + a_z\,\varepsilon_z)^2\right]^2, \tag{34}$$

et que nous n'écrivons pas $\frac{1}{2}(a_x\,\varepsilon_x + \ldots)^4$, parce que le trinôme $a_x\,\varepsilon_x + \ldots$, entre parenthèses, doit être élevé au carré, puis le sextinôme résultant élevé au carré pour éviter, entre les sous-lettres des a, des interversions qui ne sont permises que lorsqu'on reconnaît avec nous le principe des six égalités (8).

En remplaçant ε_x, ε_y, ε_z par leurs valeurs, comprises dans l'expression (30) $\varepsilon_i = \varepsilon_{x'}\,c_{ix'} + \varepsilon_{y'}\,c_{iy'} + \varepsilon_{z'}\,c_{iz'}$, on a

$$\Phi' = \frac{1}{2}\Big\{\big[(a_x\,c_{xx'} + a_y\,c_{yx'} + a_z\,c_{zx'})\,\varepsilon_{x'} + (a_x\,c_{xy'} + a_y\,c_{yy'} + a_z\,c_{zy'})\,\varepsilon_{y'} + (a_x\,c_{xz'} + a_y\,c_{yz'} + a_z\,c_{zz'})\,\varepsilon_{z'}\big]^2\Big\}^2,$$

qui, comparée à une expression semblable à la précédente (34) mais composée pour les axes coordonnés nouveaux, savoir

$$\Phi = \frac{1}{2}\left[(a_{x'}\,\varepsilon_{x'} + a_{y'}\,\varepsilon_{y'} + a_{z'}\,\varepsilon_{z'})^2\right]^2,$$

et qui représente toujours (sauf les p^0 abstraits) le potentiel dont la valeur invariable ne dépend point de la direction des coordonnées (ou de la manière dont a été taillé l'élément de volume considéré au n° **2**), montre bien qu'on a la formule symbolique (33), au moins lorsque les directions n, s sont, comme celles x', y', prises au nombre des directions x', y', z' des nouveaux axes rectangulaires.

On peut encore y arriver, en n'employant que les symboles a_x, a_y, a_z, a_{xx}, etc., sans les symboles p_x, p_y, p_z, ε_x, ε_y, ε_z.

En effet, l'expression (25) $p_{ns} = p_{xx} c_{nx} c_{sx} + \ldots$, si l'on substitue aux p_{xx}, p_{yy}, etc., leurs valeurs (1) revenant à

$$(a_{xx} \text{ ou } a_{yy} \text{ ou etc.})(a_{xx}\partial_x + \ldots + a_{yz} g_{yz} + \ldots)$$

devient

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} p_{ns} &= (a_x c_{nx} + a_y c_{ny} + a_z c_{nz})(a_x c_{sx} + a_y c_{sy} + a_z c_{sz}) \times \\ &\quad \times (a_{xx}\partial_x + a_{yy}\partial_y + a_{zz}\partial_z + a_{yz} g_{yz} + a_{zx} g_{zx} + a_{xy} g_{xy}). \end{aligned}\right.$$

Remplaçant $\partial_x, \partial_y \ldots g_{xy}$ par leurs expressions non symboliques (26) et ordonnant, dans la troisième parenthèse, par rapport à $\partial_{x'}, \partial_{y'}, \ldots g_{x'y'}$, il est facile de voir que $\partial_{x'}$ y est affecté d'un sextinôme revenant à

$$(a_x c_{x'x} + a_y c_{x'y} + a_z c_{x'z})^2,$$

et $g_{y'z'}$ d'un polynôme revenant à

$$(a_x c_{y'x} + a_y c_{y'y} + a_z c_{y'z})(a_x c_{z'x} + a_y c_{z'y} + a_z c_{z'z}).$$

Comparant, sans même développer (35), avec l'expression (24)

$$p_{ns} = a_{nsx'x'}\partial_{x'} + \ldots + a_{nsy'z'} g_{y'z'} + \ldots,$$

on reconnaît que chaque sous-lettre i des coefficients a de celle-ci répond à un trinôme

$$a_x c_{ix} + a_y c_{iy} + a_z c_{iz},$$

ce qui prouve bien la formule (33) du numéro précédent.

8. *Formules et équations de l'élasticité écrites symboliquement.* — En complétant les formules (28) des pressions et (34) du potentiel par l'addition des parties affectées des p^0, l'on a, au moyen de nos notations symboliques (27),

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} p_{xx \text{ ou } yz \text{ ou } \ldots} &= p^0_{xx \text{ ou } yz \text{ ou } \ldots}\left(1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right) + \\ &+ \left(p^0_x \frac{d}{dx} + p^0_y \frac{d}{dy} + p^0_z \frac{d}{dz}\right)(2 p^0_x u \text{ ou } p^0_y w + p^0_z v \text{ ou } \ldots) + \\ &+ a_{xx \text{ ou } yz}(a_x \varepsilon_x + a_y \varepsilon_y + a_z \varepsilon_z)^2, \end{aligned}\right.$$

$$(37) \qquad \Phi = (p_x^0\,\varepsilon_x + p_y^0\,\varepsilon_y + p_z^0\,\varepsilon_z)^2 + \frac{1}{2}[(\mathrm{a}_x\,\varepsilon_x + \mathrm{a}_y\,\varepsilon_y + \mathrm{a}_z\,\varepsilon_z)^2]^2.$$

Et les trois équations d'équilibre indéfinies (19) peuvent s'écrire

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\rho\,(\mathrm{X} \text{ ou } \mathrm{Y} \text{ ou } \mathrm{Z}) = \left(p_x^0\,\frac{d}{dx} + p_y^0\,\frac{d}{dy} + p_z^0\,\frac{d}{dz}\right)^2 (u \text{ ou } v \text{ ou } w) + \\ & \quad + \mathrm{a}_{x \text{ ou } y \text{ ou } z}\left(\mathrm{a}_x\,\frac{d}{dx} + \mathrm{a}_y\,\frac{d}{dy} + \mathrm{a}_z\,\frac{d}{dz}\right) \times \\ & \quad \times \left(\mathrm{a}_x\,\frac{d}{dx} + \mathrm{a}_y\,\frac{d}{dy} + \mathrm{a}_z\,\frac{d}{dz}\right)(\mathrm{a}_x\,u + \mathrm{a}_y\,v + \mathrm{a}_z\,w). \end{aligned} \right.$$

Nous ferons usage aux paragraphes suivants de ces formules abrégées.

REMARQUE NOUVELLE SUR LA FORME $x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

J'ai donné (dans le cahier de mai 1860, p. 147) une expression simple du nombre des solutions que comporte l'équation

$$n = x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2),$$

ou n est un entier donné, quand on y prend pour x, y, z, t des entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs. Mais quel serait le nombre des solutions de cette même équation si l'on n'admettait pour x, y, z, t que des valeurs impaires et positives? Pour répondre à cette question, j'observe d'abord que l'équation dont il s'agit deviendra alors impossible si n n'est pas un multiple de 8. Maintenant soit n multiple de 8; on pourra écrire

$$n = 8.3^{\beta}.2^{\gamma}m,$$

m étant un entier impair premier à 3, et je dis que le nombre demandé sera égal à

$$2^{\gamma}\zeta_1(m),$$

où je désigne à mon ordinaire par $\zeta_1(m)$ la somme des diviseurs de m.

Ainsi pour $n = 8$ on n'a qu'une seule solution, laquelle est fournie par l'identité

$$8 = 1^2 + 1^2 + 3(1^2 + 1^2).$$

Pour $n = 16$, on doit avoir deux solutions. La double équation

$$16 = 1^2 + 3^2 + 3(1^2 + 1^2) = 3^2 + 1^2 + 3(1^2 + 1^2)$$

confirme ce fait. Pour $n = 24$ et pour $n = 32$, le nombre de solutions deviendra égal à 4. Pour $n = 40$, il sera égal à 6. Mais je n'ai pas à insister sur ces vérifications numériques.

Sur la surface qui coupe la courbe d'intersection de deux surfaces algébriques données dans les points de contact des plans osculateurs stationnaires;

PAR M. CLEBSCH.

M. Salmon, dans son excellent traité *Sur la Géométrie analytique à trois dimensions* (Dublin, 1862), remarque qu'il n'a pas réussi à réduire à la forme la plus simple l'équation d'une surface qui coupe dans les points de contact des plans osculateurs stationnaires la courbe d'intersection de deux surfaces algébriques données. Il ne me semble donc pas qu'il soit sans intérêt de donner dans ce qui suit la réduction dont il s'agit.

Soient $u = 0$ et $v = 0$ les équations de deux surfaces données, l'une du degré m, l'autre du degré n; désignons par u_i, v_i, u_{ik}, v_{ik} les quantités

$$(1)\quad \begin{cases} u_i = \dfrac{1}{m}\dfrac{du}{dx_i}, & v_i = \dfrac{1}{m}\dfrac{dv}{dx_i}, \\ u_{ik} = \dfrac{1}{m.m-1}\dfrac{d^2u}{dx_i\,dx_k}, & v_{ik} = \dfrac{1}{n.n-1}\dfrac{d^2v}{dx_i\,dx_k}, \end{cases}$$

x_1, x_2, x_3, x_4 étant des coordonnées homogènes d'un point quelconque x. A cause des équations (1), on a identiquement

$$(2)\quad \begin{cases} u_i = u_{i1}x_1 + u_{i2}x_2 + u_{i3}x_3 + u_{i4}x_4, \\ v_i = v_{i1}x_1 + v_{i2}x_2 + v_{i3}x_3 + v_{i4}x_4, \\ u = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4, \\ v = v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4. \end{cases}$$

Or M. Hesse a trouvé (*Journal de Crelle*, t. XLI) que l'équation du plan osculateur de la courbe d'intersection de u et v en un point x

prend la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} 0 = U(v_1 X_1 + v_2 X_2 + v_3 X_3 + v_4 X_4) \\ \quad - V(u_1 X_1 + u_2 X_2 + u_3 X_3 + u_4 X_4), \end{cases}$$

U et V désignant les covariants suivants :

$$(4)\qquad \begin{cases} U = (m-1) \begin{vmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} & u_{41} & v_1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & v_2 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & v_3 \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & v_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 \end{vmatrix}, \\ V = (n-1) \begin{vmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & u_1 \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} & u_2 \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} & u_3 \\ v_{14} & v_{24} & v_{34} & v_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Je commencerai par établir de nouveau cette équation de M. Hesse, la méthode employée par l'illustre géomètre d'Heidelberg étant susceptible de quelques simplifications. Concevons trois points consécutifs de la courbe x, $x + dx$, $x + 2dx + d^2x$; l'équation d'un plan passant par ces points, c'est-à-dire l'équation du plan osculateur, sera

$$(5)\qquad 0 = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 & d^2x_4 \end{vmatrix}.$$

Il y a entre les quantités dx, d^2x des relations qu'on trouve en différentiant deux fois les équations des surfaces données. Ayant égard aux notations adoptées, on obtient les équations

$$(6)\qquad \begin{cases} 0 = u_1\,dx_1 + u_2\,dx_2 + u_3\,dx_3 + u_4\,dx_4, \\ 0 = v_1\,dx_1 + v_2\,dx_2 + v_3\,dx_3 + v_4\,dx_4; \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} 0 = u_1\, d^2 x_1 + u_2\, d^2 x_2 + u_3\, d^2 x_3 + u_4\, d^2 x_4 \\ \qquad\qquad + (m-1)\,\Sigma\Sigma u_{ik}\, dx_i\, dx_k, \\ 0 = v_1\, d^2 x_1 + v_2\, d^2 x_2 + v_3\, d^2 x_3 + v_4\, d^2 x_4 \\ \qquad\qquad + (n-1)\,\Sigma\Sigma v_{ik}\, dx_i\, dx_k. \end{cases}$$

Or, si l'on multiplie le déterminant (5) par le déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix},$$

dans lequel les α, β sont des quantités quelconques, le produit, qui est lui-même un déterminant, contient à cause des équations (6) quelques termes évanouissants, et le reste se décompose en deux facteurs, dont l'un contenant les α, β est étranger au problème, tandis que l'autre qui est essentiel prend la forme

$$\begin{aligned} &(u_1\, d^2 x_1 + u_2\, d^2 x_2 + u_3\, d^2 x_3 + u_4\, d^2 x_4) \\ &\qquad\qquad (v_1 X_1 + v_2 X_2 + v_3 X_3 + v_4 X_4) \\ &- (v_1\, d^2 x_1 + v_2\, d^2 x_2 + v_3\, d^2 x_3 + v_4\, d^2 x_4) \\ &\qquad\qquad (u_1 X_1 + u_2 X_2 + u_3 X_3 + u_4 X_4). \end{aligned}$$

Ici on peut se servir des équations (7) pour éliminer les $d^2 x$, et alors on a l'équation du plan osculateur sous la forme suivante

$$(8)\quad \begin{cases} 0 = (m-1)(v_1 X_1 + v_2 X_2 + v_3 X_3 + v_4 X_4)\,\Sigma\Sigma u_{ik}\, dx_i\, dx_k \\ \quad - (n-1)(u_1 X_1 + u_2 X_2 + u_3 X_3 + u_4 X_4)\,\Sigma\Sigma v_{ik}\, dx_i\, dx_k. \end{cases}$$

Les quantités dx sont assujetties aux deux équations (6); mais comme les coordonnées homogènes satisfont toujours à une équation linéaire de la forme

$$(9)\qquad k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4 = 1,$$

on en déduit une troisième équation

$$k_1\,dx_1 + k_2\,dx_2 + k_3\,dx_3 + k_4\,dx_4 = 0. \tag{10}$$

En opérant par cette équation combinée avec les équations (6), il est évident que les quantités dx seront proportionnelles aux déterminants qui sortent du système incomplet

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix}. \tag{10^a}$$

Introduisant donc ces valeurs proportionnelles au lieu des dx dans l'équation (9), on peut substituer aux deux sommes doubles les déterminants

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_1 & v_1 & k_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_2 & v_2 & k_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & u_3 & v_3 & k_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & u_4 & v_4 & k_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & u_1 & v_1 & k_1 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & u_2 & v_2 & k_2 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} & u_3 & v_3 & k_3 \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} & u_4 & v_4 & k_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \end{array}\right. \tag{10^b}$$

Pour transformer ces déterminants, il ne faut que multiplier leurs quatre premières colonnes par x_1, x_2, x_3, x_4 respectivement, les retrancher de la cinquième, et alors opérer de la même manière sur les séries. On détruit ainsi les termes u_i dans le premier déterminant,

et les v_i dans le second; et au lieu des carrés formés par des zéros, on obtient les carrés suivants

$$\begin{matrix} -u & -v & -1 \\ -0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0, \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & -u & -1 \\ -u & -0 & 0 \\ -1 & 0 & 0. \end{matrix}$$

Les fonctions u, o s'évanouissant pour les points dont il s'agit, on peut mettre o à la place des u, v, et les déterminants proposés se trouvent alors réduits au carré de 1, multiplié par les déterminants désignés au-dessus par $\frac{U}{m-1}$, $\frac{V}{n-1}$. De cette manière, l'équation (8) se trouve réduite à la forme (3), qui est la forme donnée par M. Hesse.

Passons à l'investigation des points x de la courbe donnée qui sont situés avec les trois points consécutifs dans le même plan, plan osculateur stationnaire. On peut partir de deux points de vue différents. En premier lieu, on revient à l'équation (3), et on établit la condition nécessaire pour que le plan osculateur mené à un point très-voisin $x + dx$, coïncide avec le plan osculateur mené au point x, c'est-à-dire la condition nécessaire pour que les équations

$$(11)\quad \begin{cases} \Sigma X_i (U v_i - V u_i) = 0, \\ \Sigma X_i [(U + dU\ldots)(v_i + dv_i\ldots) - (V + dV\ldots)(u_i + du_i\ldots)] = 0 \end{cases}$$

représentent le même plan.

En retranchant la première des équations (11) de la seconde et en ne conservant que les termes du premier ordre, on aura l'équation

$$\Sigma X_i (v_i dU + U dv_i - u_i dV - v dU_i) = 0,$$

laquelle, ne pouvant être différente pour les points dont il s'agit de la première des équations (11) que par un facteur commun, donne naissance aux quatre équations suivantes

$$(12)\quad \begin{cases} v_1 dU + U dv_1 - u_1 dV - V du_1 = (U v_1 - V u_1) ds, \\ v_2 dU + U dv_2 - u_2 dV - V du_2 = (U v_2 - V u_2) ds, \\ v_3 dU + U dv_3 - u_3 dV - V du_3 = (U v_3 - V u_3) ds, \\ v_4 dU + U dv_4 - u_4 dV - V du_4 = (U v_4 - V u_4) ds. \end{cases}$$

où ds désigne un facteur inconnu infiniment petit. Ces quatre équations sont linéaires quant aux cinq quantités dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, ds, et comme on a à vérifier en outre les trois équations (6), (10), qui contiennent ces mêmes quantités, on pourrait croire qu'on devait obtenir trois équations finies entre x_1, x_2, x_3, x_4, en chassant de ces sept équations les cinq quantités infiniment petites. Mais on voit facilement qu'on peut former deux combinaisons des équations (12), qui s'évanouissent identiquement à l'aide des équations $u = 0$, $v = 0$, de manière qu'en effet les équations (12), (6), (10) ne représentent que cinq équations diverses. On obtient la première de ces combinaisons en multipliant les équations (12) par x_1, x_2, x_3, x_4, où la somme des produits s'évanouit à cause des équations

$$x_1\,du_1 + x_2\,du_2 + x_3\,du_3 + x_4\,du_4 = 0,$$
$$x_1\,dv_1 + x_2\,dv_2 + x_3\,dv_3 + x_4\,dv_4 = 0,$$

qui sont une conséquence nécessaire des équations $u = 0$, $v = 0$. La seconde sera obtenue en multipliant les équations (12) par dx_1, dx_2, dx_3, dx_4. Alors dans la somme se détruisent quelques termes à l'aide des équations (6), et on obtiendra

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{U}\,\Sigma\,dx_i\,dv_i - \mathrm{V}\,\Sigma\,dx_i\,du_i \\ &= \mathrm{U}\,\Sigma\Sigma\,(n-1)\,v_{ik}\,dx_i\,dx_k - \mathrm{V}\,\Sigma\Sigma\,(m-1)\,u_{ik}\,dx_i\,dx_k. \end{aligned}$$

Mais les sommes doubles qui entrent dans cette formule sont proportionnelles aux fonctions U, V, elles-mêmes; d'où il suit que cette combinaison elle-même s'évanouit identiquement.

Pour former deux autres combinaisons des équations (12) qui ne s'évanouissent pas, j'ordonne les expressions de U et V (4) suivant les quantités u_i, v_i, qui en forment une colonne, et en désignant par A_i l'ensemble des termes qui sont multipliés par v_i dans le déterminant U, par B_i les termes multipliés par u_i dans le déterminant V, j'écris

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathrm{U} = v_1\,\mathrm{A}_1 + v_2\,\mathrm{A}_2 + v_3\,\mathrm{A}_3 + v_4\,\mathrm{A}_4, \\ \mathrm{V} = u_1\,\mathrm{B}_1 + u_2\,\mathrm{B}_2 + u_3\,\mathrm{B}_3 + u_4\,\mathrm{B}_4. \end{cases}$$

Or je multiplie les équations (12) par A_1, A_2, A_3, A_4 et par B_1, B_2,

B_3, B_4; alors, en faisant les sommes, on obtient

$$(14)\quad \begin{cases} U\,dU + U(A_1\,dv_1 + A_2\,dv_2 + A_3\,dv_3 + A_4\,dv_4) = U^2\,ds, \\ V\,dV + V(B_1\,du_1 + B_2\,du_2 + B_3\,du_3 + B_4\,du_4) = V^2\,ds, \end{cases}$$

ou, en chassant les facteurs U, V,

$$(15)\quad \begin{cases} dU + A_1\,dv_1 + A_2\,dv_2 + A_3\,dv_3 + A_4\,dv_4 = U\,ds, \\ dV + B_1\,du_1 + B_2\,du_2 + B_3\,du_3 + B_4\,du_4 = V\,ds. \end{cases}$$

En formant les équations (14), on a omis quelques termes; ce sont ceux qui sont multipliés par

$$\Sigma A_i u_i, \quad \Sigma A_i\,du_i, \quad \Sigma B_i v_i, \quad \Sigma B_i\,dv_i.$$

Il est facile de démontrer que ces expressions s'évanouissent à cause des équations $u = 0$, $v = 0$. Commençons par la discussion de l'expression $\Sigma A_i u_i$, c'est-à-dire du déterminant U, les quantités u_i mises à la place de la série des v_i. Mais cela fait, si l'on retranche de la série en question les autres séries multipliées par x_1, x_2, x_3, x_4, tous les termes u_i disparaissent, et au lieu de zéro on a v, ce qui s'évanouit; donc l'expression dont il s'agit s'évanouit aussi. De la même manière s'évanouit la somme $\Sigma B_i v_i$. Pour faire voir la même propriété de $\Sigma A_i\,dv_i$, c'est-à-dire du déterminant U, les du_i mis à la place de la série des v_i, on retranche de la dernière série les autres séries multipliées par $(m-1)\,dx_1$, etc., et on fera de même de la somme $\Sigma B_i\,dv_i$.

Cela posé, on peut se servir des équations (6), (10) et (15) au lieu de (6), (10) et (12). Faisons, à l'analogie de l'équation (1),

$$U_i = \frac{1}{3m-2n-8}\frac{dU}{dx_i}, \quad V_i = \frac{1}{3n+2m-8}\frac{dV}{dx_i},$$

$3m+2n-8$ et $3n+2m-8$ étant les ordres des fonctions U, V. Alors les équations (15) peuvent être mises sous la forme

$$(16)\quad \begin{cases} \Sigma dx_i[(3m+2n-8)U_i + (n-1)\Sigma_k A_k v_{ik}] = U\,ds, \\ \Sigma dx_i[(3n+2m-8)V_i + (m-1)\Sigma_k B_k u_{ik}] = V\,ds, \end{cases}$$

Donc, si l'on égale à zéro le déterminant des équations linéaires (6), (10) et (16), on aura l'équation

$$\begin{vmatrix} (3m+2n-8)U_1+(n-1)\Sigma_k A_k v_{1k} & (3n+2m-8)V_1+(m-1)\Sigma_k B_k u_{1k} & u_1 & v_1 & k_1 \\ (3m+2n-8)U_2+(n-1)\Sigma_k A_k v_{2k} & (3n+2m-8)V_2+(m-1)\Sigma_k B_k u_{2k} & u_2 & v_2 & k_2 \\ (3m+2n-8)U_3+(n-1)\Sigma_k A_k v_{3k} & (3n+2m-8)V_3+(m-1)\Sigma_k B_k u_{3k} & u_3 & v_3 & k_3 \\ (3m+2n-8)U_4+(n-1)\Sigma_k A_k v_{4k} & (3n+2m-8)V_4+(m-1)\Sigma_k B_k u_{4k} & u_4 & v_4 & k_4 \\ U & V & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On en forme l'équation définitive dont il s'agit en chassant les coefficients k, ce qui se fait si l'on multiplie les quatre premières séries par x_1, x_2, x_3, x_4, et si l'on en retranche la somme de la dernière multipliée par $3m+3n-9$. Dans la dernière série, on aura alors 0 à la place de U, V et u, v, 1 ou 0, 0, 1 à la place des zéros qui s'y trouvent; donc des cinq termes de cette série quatre termes s'évanouissent, et on aura, au lieu du déterminant proposé, ce qui est multiplié par le cinquième terme, c'est-à-dire le déterminant

$$(17)\quad \begin{vmatrix} (3m+2n-8)U_1+(n-1)\Sigma_k A_k v_{1k} & (3n+2m-8)V_1+(m-1)\Sigma_k B_k u_{1k} & u_1 & v_1 \\ (3m+2n-8)U_2+(n-1)\Sigma_k A_k v_{2k} & (3n+2m-8)V_2+(m-1)\Sigma_k B_k u_{2k} & u_2 & v_2 \\ (3m+2n-8)U_3+(n-1)\Sigma_k A_k v_{3k} & (3n+2m-8)V_3+(m-1)\Sigma_k B_k u_{3k} & u_3 & v_3 \\ (3m+2n-8)U_4+(n-1)\Sigma_k A_k v_{4k} & (3n+2m-8)V_4+(m-1)\Sigma_k B_k u_{4k} & u_4 & v_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation représente une surface de l'ordre $6m+6n-20$ qui coupe les surfaces $u=0$, $v=0$ dans les $mn(6m+6n-20)$ points de contact des plans osculateurs stationnaires, nombre que M. Salmon a trouvé.

Lorsque les surfaces u, v sont toutes deux du deuxième ordre, les sommes $\Sigma_k A_k v_{ik}$, $\Sigma_k B_k u_{ik}$ deviennent égales à U_i, V_i, et l'équation (17) se trouve réduite à la forme plus simple

$$\begin{vmatrix} U_1 & V_1 & u_1 & v_1 \\ U_2 & V_2 & u_2 & v_2 \\ U_3 & V_3 & u_3 & v_3 \\ U_4 & V_4 & u_4 & v_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Une autre méthode de former l'équation (17) diffère de la méthode

qu'on a fait voir, en ce qu'on forme d'une manière plus directe les équations (15), et que l'on effectue en même temps la transformation que M. Salmon a demandée. La condition nécessaire pour que quatre points infiniment voisins de la courbe $u = 0$, $v = 0$ soient situés dans le même plan sera

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 & d^2x_4 \\ d^3x_1 & d^3x_2 & d^3x_3 & d^3x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions le déterminant qui forme le premier terme de cette équation par le déterminant formé par les quantités u_i, v_i et par deux autres séries quelconques. A cause des équations (2) et (6), quelques éléments du déterminant résultant s'évanouissent, et le reste devient le produit de deux facteurs, dont l'un est étranger à la question, tandis que l'autre donnera l'équation

$$\begin{vmatrix} \Sigma u_i d^2 x_i & \Sigma u_i d^3 x_i \\ \Sigma v_i d^2 x_i & \Sigma v_i d^3 x_i \end{vmatrix} = 0,$$

équation au lieu de laquelle on peut mettre les deux suivantes

$$(18) \qquad \begin{cases} \Sigma u_i d^2 x_i = ds . \Sigma u_i d^3 x_i, \\ \Sigma v_i d^2 x_i = ds . \Sigma v_i d^3 x_i, \end{cases}$$

ds étant une quantité infiniment petite. Cependant, par un choix convenable d'un élément ds, on tire des équations (b) et (c)

$$(19) \qquad \begin{cases} \Sigma u_i d^2 x_i = -(m-1)\Sigma\Sigma u_{ik} dx_i dx_k = -ds^2 . \mathrm{U}, \\ \Sigma v_i d^2 x_i = -(n-1)\Sigma\Sigma v_{ik} dx_i dx_k = -ds^2 . \mathrm{V}. \end{cases}$$

Donc, en différentiant et regardant ds comme élément constant,

$$(20) \qquad \begin{cases} \Sigma u_i d^3 x_i = -(m-1)\Sigma\Sigma u_{ik} d^2 x_i dx_k - ds^2 . d\mathrm{U}, \\ \Sigma v_i d^3 x_i = -(n-1)\Sigma\Sigma v_{ik} d^2 x_i dx_k - ds^2 . d\mathrm{V}. \end{cases}$$

L'élément ds est le même par lequel les quantités dx doivent être divisées pour devenir égales aux déterminants partiels du système in-

complet (10*). De là on conclut que les quantités $\frac{d^2x}{ds^2}$ sont les sommes des déterminants partiels correspondants formés des deux systèmes incomplets

$$\begin{vmatrix} \frac{du_1}{ds} & \frac{du_2}{ds} & \frac{du_3}{ds} & \frac{du_4}{ds} \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \frac{dv_1}{ds} & \frac{dv_2}{ds} & \frac{dv_3}{ds} & \frac{dv_4}{ds} \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix},$$

ou que l'on a

$$(m-1)\sum\sum u_{ik}\frac{d^2x_i}{ds^2}\frac{dx_k}{ds} = \begin{vmatrix} \frac{du_1}{ds} & \frac{du_2}{ds} & \frac{du_3}{ds} & \frac{du_4}{ds} \\ \frac{dv_1}{ds} & \frac{dv_2}{ds} & \frac{dv_3}{ds} & \frac{dv_4}{ds} \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix}$$

$$= -(m-1)\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_1 & v_1 & k_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_2 & v_2 & k_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & u_3 & v_3 & k_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & u_4 & v_4 & k_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{dv_1}{ds} & \frac{dv_2}{ds} & \frac{dv_3}{ds} & \frac{dv_4}{ds} & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$(n-1)\sum\sum v_{ik}\frac{d^2x_i}{ds^2}\frac{dx_k}{ds} = \begin{vmatrix} \frac{dv_1}{ds} & \frac{dv_2}{ds} & \frac{dv_3}{ds} & \frac{dv_4}{ds} \\ \frac{du_1}{ds} & \frac{du_2}{ds} & \frac{du_3}{ds} & \frac{du_4}{ds} \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix}$$

$$= -(n-1)\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & u_1 & v_1 & k_1 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & u_2 & v_2 & k_2 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} & u_3 & v_3 & k_3 \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} & u_4 & v_4 & k_4 \\ \frac{du_1}{ds} & \frac{du_2}{ds} & \frac{du_3}{ds} & \frac{du_4}{ds} & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Lorsqu'on traite ces déterminants comme on a traité les déterminants (10^b), ils prennent les formes

$$(m-1)\quad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & v_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & v_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & v_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & v_4 \\ \frac{dv_1}{ds} & \frac{dv_2}{ds} & \frac{dv_3}{ds} & \frac{dv_4}{ds} & 0 \end{vmatrix} = A_1 \frac{dv_1}{ds} + A_2 \frac{dv_2}{ds} + A_3 \frac{dv_3}{ds} + A_4 \frac{dv_4}{ds},$$

$$(n-1)\quad \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & u_1 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & u_2 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} & u_3 \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} & u_4 \\ \frac{du_1}{ds} & \frac{du_2}{ds} & \frac{du_3}{ds} & \frac{du_4}{ds} & 0 \end{vmatrix} = B_1 \frac{du_1}{ds} + B_2 \frac{du_2}{ds} + B_3 \frac{du_3}{ds} + B_4 \frac{du_4}{ds}.$$

Si l'on introduit ces expressions et les expressions (19) dans les équations (20), les équations (18) deviennent

$$dU + A_1\,dv_1 + A_2\,dv_2 + A_3\,dv_3 + A_4\,dv_4 = U\,ds,$$
$$dV + B_1\,du_1 + B_2\,du_2 + B_3\,du_3 + B_4\,du_4 = V\,ds;$$

ce sont précisément les équations (15) qu'il s'agissait de trouver.

(Carlsruhe, 3 septembre 1872.)

SUR LA FORME

$$x^2 + xy + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2;$$

Par M. J. LIOUVILLE.

On demande une expression simple du nombre N des représentations d'un entier donné n, par la forme

$$x^2 + xy + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2,$$

c'est-à-dire du nombre N des solutions de l'équation

$$n = x^2 + xy + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2,$$

où x, y, z, t sont des entiers indifféremment positifs, nuls ou négatifs.

Pour répondre à cette question, je pose d'abord

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m désignant un entier impair non divisible par 3, et les exposants α, β pouvant se réduire à zéro; puis, je cherche la somme

$$\zeta_1(m)$$

des diviseurs de m, laquelle joue ici un rôle important. On a en effet

$$N = 6(3^{\beta+1} - 2)\zeta_1(m).$$

On voit que l'exposant α n'influe nullement sur la valeur de N qui pour toutes les valeurs possibles de α reste la même que si l'on avait $\alpha = 0$. L'exposant β au contraire a de l'influence.

Pour $n = 1$, notre formule donne $N = 6$; et dans ce cas il y a effectivement six représentations qui répondent à $x = 0$, $t = 0$, avec $x = \pm 1$, $y = 0$, ou $x = 0$, $y = \pm 1$, ou enfin $x = \pm 1$, $y = \mp 1$.

Pour $n = 2$, on a également $N = 6$. Pour $n = 3$, il vient $N = 42$, et ainsi de suite. Mais je n'insiste pas sur ces applications numériques.

Supposons maintenant qu'au lieu de chercher le nombre total N des solutions propres ou impropres de l'équation

$$2^\alpha 3^\beta m = x^2 + xy + y^2 + 2z^2 + 2zt + 2t^2,$$

on demande seulement le nombre total M des solutions propres, c'est-à-dire des solutions pour lesquelles x, y, z, t n'ont aucun facteur commun > 1. Il faudra d'abord observer que de telles solutions n'existent pas quand on a $\alpha > 1$, car alors x, y, z, t ont nécessairement le facteur commun 2, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer. Nous n'avons donc à nous occuper que de l'entier impair $3^\beta m$ et de l'entier impairement pair $2.3^\beta m$. La valeur de M est la même pour ces deux nombres. Pour en donner l'expression, introduisons au lieu de $\zeta_1(m)$ la fonction

$$Z_1(m)$$

définie, au moyen des facteurs premiers $a, b, \ldots$ de l'entier

$$m = a^\mu b^\nu \ldots,$$

par l'équation

$$Z_1(m) = (a^\mu + a^{\mu-1})(b^\nu + b^{\nu-1})\ldots,$$

et distinguons les trois cas de $\beta = 0$, $\beta = 1$, $\beta > 1$.

Quand $\beta = 0$, c'est-à-dire quand il s'agit de l'un des deux entiers

$$m, \ 2m,$$

on a

$$M = 6Z_1(m).$$

Quand $\beta = 1$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un des deux entiers

$$3m, \ 6m,$$

on a

$$M = 42 Z_1(m).$$

Enfin, pour les entiers

$$3^\beta m, \quad 2.3^\beta m,$$

qui répondent à $\beta > 1$, on trouve

$$M = 16.3^\beta Z_1(m).$$

Je ne crois pas avoir besoin d'ajouter des exemples.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. LIOUVILLE A M. BESGE.

« ... Soit m un nombre entier donné, de la forme $4\mu + 1$. Posons de toutes les manières possibles

$$2m = i^2 + i'^2$$

et

$$m = r^2 + 4s^2,$$

i, i', r désignant des entiers impairs positifs, tandis que l'entier s est indifféremment positif, nul ou négatif; puis, considérons les deux sommes

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

et

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r,$$

relatives à ces deux modes de décomposition pour un même entier m.

» Il existe entre ces deux sommes une relation simple; car elles sont égales et de même signe quand μ est pair, c'est-à-dire quand m est de la forme $8\nu + 1$, tandis qu'elles sont égales et de signe contraire quand μ est impair, c'est-à-dire quand m est de la forme $8\nu + 5$.

» En d'autres termes, on a

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i = (-1)^{\mu} \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r.$$

» Par exemple, pour $m = 1$, on a $2 = 1^2 + 1^2$ et $1 = 1^2 + 4.0^2$; dans ce cas la valeur commune des deux sommes est 1. Mais pour $m = 5$, les équations à employer sont $10 = 1^2 + 3^2$, $10 = 3^2 + 1^2$ et

$5 = 1^2 + 4(\pm 1)^2$. De là

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i = -2, \quad \sum (-1)^{\frac{r-1}{2}} r = 2.$$

Les deux sommes sont donc cette fois égales, mais de signe contraire. Elles se retrouveraient égales et de même signe pour $m = 9$. Et ainsi de suite. Il peut arriver, bien entendu, qu'elles soient toutes les deux nulles : exemple $m = 21$. »

SOLUTION D'UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. G. MATHET,
Professeur au lycée de Nîmes.

I.

Entre deux points fixes, M_0 et M_1, on trace une courbe quelconque dans l'espace. Soient R une fonction réelle des coordonnées d'un point quelconque M de la courbe par rapport à trois axes fixes, et φ un angle, fonction des mêmes coordonnées. Le point M décrivant la courbe, de M_0 en M_1, on multiplie la longueur de l'arc infiniment petit, compté à partir de chaque position du point M, par la valeur correspondante de R, et on fait tourner la ligne obtenue, d'un angle égal à φ, autour d'un axe normal à la courbe en M; on compose ensuite comme des forces les lignes infiniment petites ainsi obtenues : est-il possible de déterminer les fonctions R et φ, et la normale autour de laquelle se fait la rotation, de telle sorte que la résultante ne dépende que des coordonnées des points M_0 et M_1, quelle que soit la courbe qui les joint?

On connaît la solution de ce problème, pour le cas où l'on suppose que toutes les courbes qui vont de M_0 en M_1 sont dans un même plan, et que l'axe de rotation est constamment normal à ce plan. Si x et y sont des coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires fixes pris dans ce plan; si l'on a

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{Y}{X},$$

X et Y étant des fonctions réelles de x et y; enfin si l'on pose

$$u = x + y\sqrt{-1}, \quad F(u) = X + Y\sqrt{-1},$$

la résultante considérée ci-dessus n'est autre que la ligne menée de

l'origine des coordonnées au point qui représente la valeur de l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u_1} F(u)\,du,$$

prise avec la valeur initiale zéro. Or on sait que, pour que la valeur de cette intégrale ne dépende que de ses limites, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy}, \quad \frac{dX}{dy} = -\frac{dY}{dx},$$

pourvu que les diverses courbes qui conduisent de M_0 en M_1 ne comprennent entre elles aucun point où X et Y cessent d'être continues.

J'ai réussi à résoudre complétement le problème dont l'énoncé précède, sans faire aucune hypothèse sur la nature des courbes et sur la direction de l'axe de rotation, sauf qu'il soit en chaque point normal à la courbe décrite. J'ai trouvé les conditions suivantes, dont on remarquera l'analogie avec celles que l'on trouve dans le cas particulier indiqué ci-dessus.

Pour que la résultante ne dépende que des coordonnées des points M_0 et M_1, il faut et il suffit :

1° Que toutes les courbes tracées entre M_0 et M_1 soient situées sur une même surface, appartenant à la classe de celles qu'on appelle *surfaces d'étendue minimum*, et du reste quelconque;

2° Que l'axe autour duquel se fait la rotation soit, en chaque point, normal à cette surface;

3° Que R et φ, considérées comme des fonctions de coordonnées x et y, relatives à un certain système de trajectoires orthogonales de la surface, soient de la forme

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{Y}{X},$$

X et Y étant des fonctions réelles de x et y, qui satisfont seulement aux conditions

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy}, \quad \frac{dX}{dy} = -\frac{dY}{dx}.$$

Il faut, en outre, que les diverses courbes tracées sur la surface entre M_0 et M_1 soient situées de telle sorte que l'une puisse se ramener à l'autre, par une déformation continue, sans passer par aucun point où X et Y cesseraient d'être continues.

Pour établir ces résultats, j'ai dû me servir de la notation et des règles du *Calcul des Quaternions* de M. Hamilton (*Lectures on Quaternions*, by sir W.-R. Hamilton; Dublin, 1853). J'indiquerai du reste brièvement les points de cette théorie qui m'ont servi pour le présent travail.

II.

La première chose à faire, c'est de trouver une expression analytique de la transformation que l'on fait subir à la courbe $M_0 M_1$ dans notre problème.

Nous appellerons *vecteur* une droite allant de l'origine à un point quelconque, et nous conviendrons que la somme de deux vecteurs est la diagonale du parallélogramme dont ils sont les côtés. Cela posé, soient i, j, k des longueurs égales à l'unité, prises respectivement, à partir de l'origine, sur les directions positives des trois axes coordonnés rectangulaires. L'expression

$$u = ix + jy + kz,$$

représentera le vecteur allant de l'origine au point dont les coordonnées sont x, y, z. Si ce point décrit la courbe, le vecteur du point infiniment voisin sera

$$u + du = i(x + dx) + j(y + dy) + k(z + dz),$$

et, par conséquent, un vecteur égal et parallèle à l'élément de courbe compris entre ces deux points aura pour expression

$$du = idx + jdy + kdz.$$

Soit maintenant une expression de la forme

$$W + iX + jY + kZ,$$

W, X, Y, Z étant des fonctions réelles de x, y, z. Cette expression, que M. Hamilton appelle un *quaternion*, prend, pour chaque valeur de u, une ou plusieurs valeurs déterminées, et peut dès lors être regardée comme une fonction de u. Si l'on pose

$$\frac{X}{\cos\alpha} = \frac{Y}{\cos\beta} = \frac{Z}{\cos\gamma},$$

on pourra l'écrire

$$F(u) = W + \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,(i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma),$$

et la quantité entre parenthèses représente un vecteur, de longueur égale à l'unité, faisant avec les axes des angles α, β, γ; c'est l'*axe* du quaternion. Nous le désignerons par λ, de sorte que

$$F(u) = W + \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,.\,\lambda.$$

La condition que λ est perpendiculaire au vecteur du est exprimée par

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

Si l'on pose maintenant

$$R = \sqrt{W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{W},$$

si l'on multiplie le vecteur du par R, et si on le fait tourner, d'un angle égal à φ, autour de l'axe λ, on obtiendra un nouveau vecteur

$$ix' + jy' + kz'.$$

Or on démontre, dans la théorie des quaternions, que l'expression de ce nouveau vecteur est précisément celle que l'on obtient en multipliant $F(u)$ par du, c'est-à-dire

$$W + iX + jY + kZ \quad \text{par} \quad i\,dx + j\,dy + k\,dz,$$

avec la condition $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$; pourvu que, en faisant cette multiplication, on ait soin de ne pas intervertir l'ordre des fac-

teurs et de poser

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \end{cases}$$

La somme de ces produits, prise en faisant varier u de u_0 à u_1, exprimera la somme des vecteurs infiniment petits obtenus par la transformation de la courbe M_0M_1, c'est-à-dire la résultante considérée ci-dessus; son expression sera donc l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u_1} F(u)\,du.$$

Nous avons maintenant à chercher les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions W, X, Y, Z pour que cette intégrale prenne la même valeur lorsqu'on va du point M_0 au point M_1 en suivant deux courbes infiniment voisines, c'est-à-dire pour que la variation de l'intégrale, quand on y remplace x, y, z par $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, sans changer les limites, soit identiquement nulle. Or on a

$$\delta \int_{u_0}^{u_1} F(u)\,du = \int_{u_0}^{u_1} [\delta F(u).du + F(u).d\delta u];$$

il suffit donc qu'on ait

$$(1)\qquad \delta F(u).du = dF(u).\delta u,$$

ce qui réduit la variation de l'intégrale à

$$\int_{u_0}^{u_1} [dF(u).\delta u + F(u)\,d\delta u] = \int_{u_0}^{u_1} d[F(u)\,\delta u].$$

quantité identiquement nulle.

Développons la condition exprimée par l'équation (1). Si l'on pose

$$dF(u) = dW + i\,dX + j\,dY + k\,dZ,$$
$$\delta F(u) = \delta W + i\,\delta X + j\,\delta Y + k\,\delta Z,$$

et si l'on fait les multiplications en tenant compte de l'ordre des facteurs et des équations (α), on trouve, en égalant les coefficients de i, j, k et les termes indépendants dans les deux membres, les quatre équations suivantes

$$(2)\quad \begin{cases} dX\,\delta x + dY\,\delta y + dZ\,\delta z = \delta X\,dx + \delta Y\,dy + \delta Z\,dz, \\ dW\,\delta x + dY\,\delta z - dZ\,\delta y = \delta W\,dx + \delta Y\,dz - \delta Z\,dy, \\ dW\,\delta y + dZ\,\delta x - dX\,\delta z = \delta W\,dy + \delta Z\,dx - \delta X\,dz, \\ dW\,\delta z + dX\,\delta y - dY\,\delta x = \delta W\,dz + \delta X\,dy - \delta Y\,dx. \end{cases}$$

Il faut maintenant remplacer, dans ces équations,

$$dW \quad \text{par} \quad \frac{dW}{dx}dx + \frac{dW}{dy}dy + \frac{dW}{dz}dz,$$

$$\delta W \quad \text{par} \quad \frac{dW}{dx}\delta x + \frac{dW}{dy}\delta y + \frac{dW}{dz}\delta z,$$

et dX, δX, etc., par les expressions analogues. Si ensuite on substitue à dz et à δz leurs valeurs prises dans les équations

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0, \quad X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0,$$

on trouve, par un calcul facile, les quatre équations suivantes

$$(3)\quad Z\left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right) + Y\left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}\right) + X\left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right) = 0,$$

$$(4)\quad Z\left(\frac{dW}{dy} + \frac{dZ}{dx}\right) + Y\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dW}{dz}\right) - X\left(\frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right) = 0,$$

$$(5)\quad X\left(\frac{dW}{dz} - \frac{dX}{dy}\right) + Z\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dW}{dx}\right) - Y\left(\frac{dZ}{dz} + \frac{dX}{dx}\right) = 0,$$

$$(6)\quad Y\left(\frac{dW}{dx} - \frac{dY}{dz}\right) + X\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dW}{dy}\right) - Z\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy}\right) = 0.$$

Ces équations expriment toutes les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions W, X, Y, Z. Il nous reste maintenant à les interpréter.

III.

L'équation (3) exprime que l'équation

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

est l'équation différentielle d'une surface. Si p et q sont les dérivées partielles de z par rapport à x et à y, tirées de l'équation de cette surface, on a identiquement

$$dz = pdx + qdy,$$

et par conséquent

$$\frac{X}{Z} = -p, \quad \frac{Y}{Z} = -q.$$

Les courbes tracées entre M_0 et M_1 doivent être situées sur cette surface, que les équations suivantes vont définir.

Si l'on multiplie les équations (4), (5) et (6) respectivement par X, Y, Z, et si l'on ajoute les produits, on élimine ainsi W, et il vient

$$ZX\frac{dZ}{xd} + XY\frac{dY}{dx} - X^2\left(\frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right) + XY\frac{dX}{dy} + ZY\frac{dZ}{dy} - Y^2\left(\frac{dZ}{dz} + \frac{dX}{dx}\right)$$
$$+ ZY\frac{dY}{dz} + ZX\frac{dX}{dz} - Z^2\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy}\right) = 0,$$

d'où l'on tire

$$X\left(X\frac{dX}{dx} + Y\frac{dY}{dx} + Z\frac{dZ}{dx}\right) - (X^2+Y^2+Z^2)\frac{dX}{dx} + Y\left(X\frac{dX}{dy} + Y\frac{dY}{dy} + Z\frac{dZ}{dy}\right)$$
$$- (X^2+Y^2+Z^2)\frac{dY}{dy} + Z\left(X\frac{dX}{dz} + Y\frac{dY}{dz} + Z\frac{dZ}{dz}\right)$$
$$- (X^2+Y^2+Z^2)\frac{dZ}{dz} = 0,$$

ou, enfin,

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} + \frac{d}{dy}\cdot\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} + \frac{d}{dz}\cdot\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} = 0.$$

Cette équation peut encore s'écrire ainsi

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\frac{d}{dy}\cdot\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}-\frac{d}{dz}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0.$$

Si l'on convient que, z étant une fonction de x et y, on écrira

$$\left(\frac{d}{dx}\right)f(x,y,z)=\frac{d.f(x,y,z)}{dx}+\frac{d.f(x,y,z)}{dz}\cdot\frac{dz}{dx},$$

il vient

$$\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{d}{dx}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+p\frac{d}{dz}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\left(\frac{d}{dy}\right)\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=\frac{d}{dy}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+q\frac{d}{dz}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

L'équation ci-dessus devient alors

$$\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\left(\frac{d}{dy}\right)\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$
$$-p\frac{d}{dz}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}-q\frac{d}{dz}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}-\frac{d}{dz}\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0,$$

ou bien

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\left(\frac{d}{dy}\right)\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right]$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dz}\frac{p^2}{1+p^2+q^2}+\frac{d}{dz}\frac{q^2}{1+p^2+q^2}+\frac{d}{dz}\frac{1}{1+p^2+q^2}\right]=0,$$

d'où

$$\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\left(\frac{d}{dy}\right)\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=0.$$

Cette équation, qui peut encore se mettre sous la forme

$$(7)\qquad (1+p^2)\,t+(1+q^2)\,r-2pqs=0,$$

en posant

$$\frac{dp}{dx}=r,\quad \frac{dq}{dy}=t,\quad \frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}=s,$$

définit les surfaces d'étendue minimum ; donc les courbes tracées entre M_0 et M_1 doivent être situées sur une de ces surfaces.

Il nous reste à déterminer Z et W. L'équation (4), si l'on y remplace X par $-pZ$ et Y par $-qZ$, devient successivement

$$\frac{dW}{dy} + q\frac{dW}{dz} + \frac{dZ}{dx} + p\frac{dZ}{dz} + p\frac{dY}{dy} - q\frac{dY}{dx} = 0,$$

$$\left(\frac{dW}{dy}\right) + \left(\frac{dZ}{dx}\right) + p\frac{dY}{dy} - q\frac{dY}{dx} = 0,$$

$$(8) \qquad \left(\frac{dW}{dy}\right) = pq\left(\frac{dZ}{dy}\right) - (1+q^2)\left(\frac{dZ}{dx}\right) - (qs - pt)Z,$$

et l'équation (5) donne de même

$$\left(\frac{dW}{dx}\right) = -pq\left(\frac{dZ}{dx}\right) + (1+p^2)\left(\frac{dZ}{dy}\right) + (ps - qr)Z.$$

Transformons ces deux équations, en considérant W et Z comme des fonctions de p et de q, et supprimant les parenthèses des dérivées totales, qui sont maintenant inutiles. Il vient

$$s\frac{dW}{dp} + t\frac{dW}{dq}$$
$$= pq\left(s\frac{dZ}{dp} + t\frac{dZ}{dq}\right) - (1+q^2)\left(r\frac{dZ}{dp} + s\frac{dZ}{dq}\right) - (qs - pt)Z,$$

$$r\frac{dW}{dp} + s\frac{dW}{dq}$$
$$= -pq\left(r\frac{dZ}{dp} + s\frac{dZ}{dq}\right) + (1+p^2)\left(s\frac{dZ}{dp} + t\frac{dZ}{dq}\right) + (ps - qr)Z.$$

D'où l'on tire, en tenant compte de l'équation (7),

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{dW}{dp} = -pq\dfrac{dZ}{dp} - (1+q^2)\dfrac{dZ}{dq} - qZ, \\ \dfrac{dW}{dq} = (1+p^2)\dfrac{dZ}{dp} + pq\dfrac{dZ}{dq} + pZ. \end{cases}$$

Enfin, si l'on pose

$$Z\sqrt{1+p^2+q^2} = -V,$$

ces équations se réduisent immédiatement à

$$\frac{dW}{dp} = \frac{pq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{dV}{dp} + \frac{1+q^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{dV}{dq},$$

$$\frac{dW}{dq} = \frac{-(1+p^2)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{dV}{dp} - \frac{pq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{dV}{dq}.$$

Nous allons maintenant remplacer les coordonnées p et q par de nouvelles variables, et nous choisirons celles qui ont été adoptées par M. Ossian Bonnet dans son Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des surfaces courbes (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1860).

Soient

$$\operatorname{tang} x = \frac{q}{p}, \quad \sin iy = \frac{i}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

i étant l'unité imaginaire $\sqrt{-1}$. On a

$$\frac{dx}{dp} = \frac{-q}{p^2+q^2}, \qquad \frac{dx}{dq} = \frac{p}{p^2+q^2},$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{-p}{(p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \frac{dy}{dq} = \frac{-q}{(p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Il vient donc

$$\frac{q}{p^2+q^2}\frac{dW}{dx} + \frac{p}{(p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{dW}{dy}$$
$$= \frac{-p}{(p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{dV}{dx} + \frac{q}{p^2+q^2}\frac{dV}{dy},$$

$$\frac{p}{p^2+q^2}\frac{dW}{dx} - \frac{q}{(p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{dW}{dy}$$
$$= \frac{q}{(p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{dV}{dx} + \frac{p}{p^2+q^2}\frac{dV}{dy}:$$

d'où l'on tire

$$\frac{dW}{dx} = \frac{dV}{dy}, \quad \frac{dW}{dy} = -\frac{dV}{dx},$$

ce qui achève de démontrer les résultats annoncés dans le § Ier.

ÉTUDE

SUR

UN CERTAIN MODE DE GÉNÉRATION

DES

SURFACES D'ÉTENDUE MINIMUM;

PAR M. G. MATHET,
Professeur au lycée de Nîmes.

Une courbe quelconque étant donnée, si l'on multiplie chaque arc infiniment petit par une certaine fonction des coordonnées de l'extrémité de cet arc, et si l'on fait tourner la ligne obtenue d'un certain angle, fonction des mêmes coordonnées, autour d'un axe normal à la courbe en ce point, on peut imaginer que l'on construise une seconde courbe dont les éléments sont respectivement égaux et parallèles aux lignes infiniment petites ainsi obtenues : cette courbe sera une *transformée* de la première, et dépendra en même temps de la nature de cette courbe, du choix de la normale prise pour axe, et de la forme des fonctions qui interviennent dans cette transformation. J'ai montré, dans une précédente étude, que toutes les courbes tracées sur une surface d'étendue minimum quelconque, et ayant leurs extrémités communes, ont pour transformées des courbes ayant aussi mêmes extrémités, lorsque, l'axe de rotation étant normal à la surface, le multiplicateur et l'angle de rotation sont des fonctions satisfaisant à deux conditions analytiques très-simples. Il est facile dès lors de prévoir que, ces conditions étant remplies, le lieu des transformées de toutes les courbes tracées sur une surface d'étendue minimum sera une nouvelle surface, et l'on est conduit à rechercher quelle peut être cette surface.

Je démontre, dans ce qui suit, que ce lieu est encore une surface d'étendue minimum. Ensuite, si les courbes que l'on transforme sont situées sur la surface d'étendue minimum engendrée par la révolution

de la chaînette, et que l'on peut appeler la *caténoïde*, on peut, en choisissant convenablement les fonctions transformatrices, obtenir, pour le lieu des transformées, une surface quelconque d'étendue minimum; de telle sorte que toutes ces surfaces peuvent être regardées comme se déduisant géométriquement de la caténoïde, et peuvent se classer par conséquent d'après la forme des fonctions transformatrices. Enfin, de ce mode de génération j'ai déduit un moyen, qui paraît assez simple, de former l'équation de toutes les surfaces d'étendue minimum qui passent par une courbe plane donnée.

I.

En conservant les notations précédemment adoptées, il est facile de voir que le lieu de nos transformées n'est autre chose que le lieu des points correspondant aux vecteurs qui représentent les valeurs de l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u} \mathrm{F}(u)\,du,$$

lorsque l'extrémité du vecteur u décrit la surface d'étendue minimum donnée. Soient ξ, η, ζ les coordonnées, par rapport à trois axes rectangulaires, du point auquel aboutit le vecteur u, et ξ', η', ζ' celles du point correspondant au vecteur v qui représente la valeur de l'intégrale. On doit avoir identiquement

$$\mathrm{F}(u)\,du = dv,$$

c'est-à-dire

$$[\mathrm{W} - \mathrm{Z}(ip + jq - k)](id\xi + jd\eta + kd\zeta) = id\xi' + jd\eta' + kd\zeta'.$$

Faisons la multiplication, en observant les règles posées ci-dessus et en remarquant que $pd\xi + qd\eta - d\zeta = 0$; égalons ensuite les coefficients de i, j, k dans les deux membres. Nous obtenons ainsi les trois équations suivantes

$$\begin{aligned} d\xi' &= \mathrm{W}\,d\xi - \mathrm{Z}(qd\zeta + d\eta), \\ d\eta' &= \mathrm{W}\,d\eta + \mathrm{Z}(qd\zeta + d\xi), \\ d\zeta' &= \mathrm{W}\,d\zeta + \mathrm{Z}(qd\xi + pd\eta). \end{aligned}$$

Remplaçons $d\zeta$ par $pd\xi + qd\eta$; il vient

$$(1) \qquad d\xi' = (W - pqZ)\,d\xi - Z(1 + q^2)\,d\eta,$$

$$(2) \qquad d\eta' = Z(1 + p^2)\,d\xi + (W + pqZ)\,d\eta,$$

$$(3) \qquad d\zeta' = (Wp + Zq)\,d\xi + (Wq - Zp)\,d\eta.$$

Les seconds membres des équations (1) et (2) sont les différentielles exactes de fonctions de ξ et η, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{d(W - pqZ)}{d\eta} = -\frac{d[Z(1 + q^2)]}{d\xi}, \quad \frac{d(W + pqZ)}{d\xi} = \frac{d[Z(1 + p^2)]}{d\eta}.$$

La première de ces équations revient en effet à

$$\frac{dW}{d\eta} = pq\frac{dZ}{d\eta} - (1 + q^2)\frac{dZ}{d\xi} - (qs - pt)\,Z,$$

et la seconde à

$$\frac{dW}{d\xi} = -pq\frac{dZ}{d\xi} + (1 + p^2)\frac{dZ}{d\eta} + (ps - qr)\,Z,$$

et ces équations sont précisément la première forme, trouvée précédemment, des conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions Z et W. ξ' et η' sont donc des fonctions de ξ et η, dont les dérivées partielles sont

$$\frac{d\xi'}{d\xi} = W - pqZ, \quad \frac{d\xi'}{d\eta} = -Z(1 + q^2),$$

$$\frac{d\eta'}{d\xi} = Z(1 + p^2), \quad \frac{d\eta'}{d\eta} = W + pqZ.$$

Si l'on multiplie l'équation (1) par p, l'équation (2) par q, et si l'on ajoute les résultats, il vient

$$pd\xi' + qd\eta' = (Wp + Zq)\,d\xi + (Wq - Zp)\,d\eta,$$

ou, en vertu de l'équation (3),

$$d\zeta' = pd\zeta' + qd\eta'.$$

Or p et q, considérées comme des fonctions de ξ' et η', satisfont à la condition

$$\frac{dp}{d\eta'} = \frac{dq}{d\xi'}.$$

On a, en effet,

$$(4) \qquad s = \frac{dp}{d\xi'}\frac{d\xi'}{d\eta} + \frac{dp}{d\eta'}\frac{d\eta'}{d\eta} = -Z(1+q^2)\frac{dp}{d\xi'} + (W + pqZ)\frac{dp}{d\eta'},$$

$$(5) \qquad r = \frac{dp}{d\xi'}\frac{d\xi'}{d\xi} + \frac{dp}{d\eta'}\frac{d\eta'}{d\xi} = (W - pqZ)\frac{dp}{d\xi'} + Z(1+p^2)\frac{dp}{d\eta'},$$

d'où

$$(W - pqZ)s + Z(1+q^2)r = [W^2 + Z^2(1+p^2+q^2)]\frac{dp}{d\eta'}.$$

On a de même

$$(6) \qquad s = \frac{dq}{d\xi'}\frac{d\xi'}{d\xi} + \frac{dq}{d\eta'}\frac{d\eta'}{d\xi} = (W - pqZ)\frac{dq}{d\xi'} + Z(1+p^2)\frac{dq}{d\eta'},$$

$$(7) \qquad t = \frac{dq}{d\xi'}\frac{d\xi'}{d\eta} + \frac{dq}{d\eta'}\frac{d\eta'}{d\eta} = -Z(1+q^2)\frac{dq}{d\xi'} + (W + pqZ)\frac{dq}{d\eta'},$$

d'où

$$(W + pqZ)s - Z(1+p^2)t = [W^2 + Z^2(1+p^2+q^2)]\frac{dq}{d\xi'}.$$

On en déduit, par soustraction,

$$Z[(1+q^2)r + (1+p^2)t - 2pqs] = [W^2 + Z^2(1+p^2+q^2)]\left(\frac{dp}{d\eta'} - \frac{dq}{d\xi'}\right),$$

et, par conséquent,

$$\frac{dp}{d\eta'} - \frac{dq}{d\xi'} = 0.$$

L'équation

$$d\zeta' = p\,d\xi' + q\,d\eta'$$

a donc pour second membre la différentielle exacte d'une fonction de ξ' et η'; par conséquent elle définit une surface, et si l'on pose

$$\frac{d\zeta'}{d\xi'} = p', \quad \frac{d\zeta'}{d\eta'} = q',$$

on a

$$p = p' \quad \text{et} \quad q = q'.$$

Les normales aux points correspondants de la surface donnée et de sa transformée sont donc parallèles, ce que, du reste, on pouvait conclure du mode de génération de la seconde.

Cette surface est aussi une surface d'étendue minimum. En effet, si nous posons, pour abréger,

$$W^2 + Z^2(1 + p^2 + q^2) = T^2,$$

les équations (4) et (5) nous ont déjà donné

$$\frac{dp}{d\eta'} = \frac{dp'}{d\eta'} = s' = \frac{1}{T^2}[(W - pqZ)s + Z(1 + q^2)r];$$

elles donnent également

$$\frac{dp}{d\xi'} = \frac{dp'}{d\xi'} = r' = \frac{1}{T^2}[(W + pqZ)r - Z(1 + p^2)s].$$

De même, des équations (6) et (7), on tire

$$\frac{dq}{d\eta'} = \frac{dq'}{d\eta'} = t' = \frac{1}{T^2}[Z(1 + q^2)s + (W - pqZ)t].$$

Donc

$$\begin{aligned} &T^2[(1 + p'^2)t' + (1 + q'^2)r' - 2p'q's'] \\ &= Z(1 + p^2)(1 + q^2)s + (W - pqZ)(1 + p^2)t + (W + pqZ)(1 + q^2)r \\ &\quad - Z(1 + p^2)(1 + q^2)s - 2pq(W - pqZ)s - 2pqZ(1 + q^2)r, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} &T^2[(1 + p'^2)t' + (1 + q'^2)r' - 2p'q's'] \\ &= (W - pqZ)[(1 + q^2)r + (1 + p^2)t - 2pqs], \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(1 + p'^2)t' + (1 + q'^2)r' - 2p'q's' = 0,$$

équation des surfaces d'étendue minimum.

II.

Supposons maintenant que la surface décrite par le point ξ, η, ζ soit la caténoïde. Son équation est

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\zeta}{a}} + e^{-\frac{\zeta}{a}}\right).$$

De là on tire

$$\frac{\xi d\xi}{\rho} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\zeta}{a}} - e^{-\frac{\zeta}{a}}\right) d\zeta, \quad \frac{\eta d\eta}{\rho} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\zeta}{a}} - e^{-\frac{\zeta}{a}}\right) d\zeta,$$

$$p = \frac{2\xi}{\rho\left(e^{\frac{\zeta}{a}} - e^{-\frac{\zeta}{a}}\right)}, \quad q = \frac{2\eta}{\rho\left(e^{\frac{\zeta}{a}} - e^{-\frac{\zeta}{a}}\right)};$$

d'où

$$\operatorname{tang} x = \frac{q}{p} = \frac{\eta}{\xi}, \quad \frac{\xi}{\cos x} = \frac{\eta}{\sin x} = \rho.$$

Donc

$$p = \frac{2\cos x}{e^{\frac{\zeta}{a}} - e^{-\frac{\zeta}{a}}} = \frac{i\cos x}{\sin i\frac{\zeta}{a}}, \quad q = \frac{2\sin x}{e^{\frac{\zeta}{a}} - e^{-\frac{\zeta}{a}}} = \frac{i\sin x}{\sin i\frac{\zeta}{a}}.$$

On a maintenant

$$\sin^2 iy = \frac{-1}{p^2 + q^2} = \sin^2 i\frac{\zeta}{a},$$

on peut donc poser

$$y = -\frac{\zeta}{a},$$

d'où

$$p = \frac{-i\cos x}{\sin iy}, \quad q = \frac{-i\sin x}{\sin iy}.$$

Les équations (1) et (2) deviennent alors

$$d\xi' = \left(W + Z\frac{\sin x\cos x}{\sin^2 iy}\right) d\xi - Z\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 iy}\right) d\eta,$$

$$d\eta' = Z\left(1 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 iy}\right) d\xi + \left(W - Z\frac{\sin x\cos x}{\sin^2 iy}\right) d\eta.$$

Introduisons la fonction V définie plus haut,

$$V = -Z\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{-Zi}{\operatorname{tang} iy}, \quad \text{d'où} \quad Z = iV \operatorname{tang} iy;$$

il vient

$$d\xi' = \left(W + iV\frac{\sin x \cos x}{\sin iy \cos iy}\right) d\xi - iV\frac{\sin^2 iy - \sin^2 x}{\sin iy \cos iy} d\eta,$$

$$d\eta' = iV\frac{\sin^2 iy - \cos^2 x}{\sin iy \cos iy} d\xi + \left(W - iV\frac{\sin x \cos x}{\sin iy \cos iy}\right) d\eta.$$

Or on a

$$\xi = \frac{a}{2}(e^y + e^{-y}) \cos x = a \cos iy \cos x,$$

$$\eta = \frac{a}{2}(e^y + e^{-y}) \sin x = a \cos iy \sin x;$$

donc

$$d\xi = -a(\cos iy \sin x dx + \sin iy \cos x . i dy),$$

$$d\eta = a(\cos iy \cos x dx - \sin iy \sin x . i dy),$$

d'où, en substituant,

$$\frac{1}{a} d\xi' = \left(-W \cos iy \sin x - iV\frac{\sin^2 x \cos x}{\sin iy} - iV\frac{\sin^2 iy - \sin^2 x}{\sin iy} \cos x\right) dx$$
$$+ \left(-W \sin iy \cos x - iV\frac{\sin x \cos^2 x}{\cos iy} + iV\frac{\sin^2 iy - \sin^2 x}{\cos iy} \sin x\right) i dy,$$

$$\frac{1}{a} d\eta' = \left(-iV\frac{\sin^2 iy - \cos^2 x}{\sin iy} \cos x + W \cos iy \cos x - iV\frac{\sin x \cos^2 x}{\sin iy}\right) dx$$
$$+ \left(-iV\frac{\sin^2 iy - \cos^2 x}{\cos iy} \cos x - W \sin iy \sin x + iV\frac{\sin^2 x \cos x}{\cos iy}\right) i dy.$$

De là on tire, en simplifiant,

$$\frac{1}{a} d\xi' = -(W \cos iy \sin x + iV \sin iy \cos x) dx$$
$$-(W \sin iy \cos x + iV \cos iy \sin x) i dy,$$

$$\frac{1}{a} d\eta' = (W \cos iy \cos x - iV \sin iy \sin x) dx$$
$$-(W \sin iy \sin x - iV \cos iy \cos x) i dy.$$

Introduisons maintenant les nouvelles variables

$$x + iy = x_1, \quad x - iy = y_1;$$

il vient

$$\begin{aligned}
\frac{2}{a} d\xi' = &-(\mathrm{W}\sin x_1 + \mathrm{W}\sin y_1 + i\mathrm{V}\sin x_1 - i\mathrm{V}\sin y_1)\,dx \\
&-(\mathrm{W}\sin x_1 - \mathrm{W}\sin y_1 + i\mathrm{V}\sin x_1 + i\mathrm{V}\sin y_1)\,idy, \\
\frac{2}{a} d\eta' = &\quad(\mathrm{W}\cos x_1 + \mathrm{W}\cos y_1 - i\mathrm{V}\cos y_1 + i\mathrm{V}\cos x_1)\,dx \\
&-(\mathrm{W}\cos y_1 - \mathrm{W}\cos x_1 - i\mathrm{V}\cos x_1 - i\mathrm{V}\cos y_1)\,idy,
\end{aligned}$$

ou enfin

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned}
\frac{2}{a} d\xi' &= -(\mathrm{W} + i\mathrm{V})\sin x_1\,dx_1 - (\mathrm{W} - i\mathrm{V})\sin y_1\,dy_1, \\
\frac{2}{a} d\eta' &= \quad(\mathrm{W} + i\mathrm{V})\cos x_1\,dx_1 + (\mathrm{W} - i\mathrm{V})\cos y_1\,dy_1.
\end{aligned} \right.$$

Maintenant on a

$$d\zeta' = p\,d\xi' + q\,d\eta';$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{2}{a} d\zeta' = &\, i(\mathrm{W} + i\mathrm{V})\frac{\cos x \sin x_1 - \sin x \cos x_1}{\sin iy}\,dx_1 \\
&+ i(\mathrm{W} - i\mathrm{V})\frac{\sin y_1 \cos x - \cos y_1 \sin x}{\sin iy}\,dy_1,
\end{aligned}$$

ou bien

$$(9) \qquad d\zeta' = \frac{ai}{2}\left[(\mathrm{W} + i\mathrm{V})dx_1 - (\mathrm{W} - i\mathrm{V})dy_1\right].$$

Remarquons que $\mathrm{W} + i\mathrm{V}$ est une fonction de x_1 seulement, et $\mathrm{W} - i\mathrm{V}$ une fonction de y_1; car on doit avoir

$$\frac{d\mathrm{W}}{dx} = \frac{d\mathrm{V}}{dy}, \quad \frac{d\mathrm{W}}{dy} = -\frac{d\mathrm{V}}{dx};$$

or

$$x = \frac{x_1 + y_1}{2}, \quad y = \frac{x_1 - y_1}{2i},$$

d'où

$$\frac{dW}{dx_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dx} - i\frac{dW}{dy}\right), \quad \frac{dW}{dy_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dx} + i\frac{dW}{dy}\right),$$

$$\frac{dV}{dx_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{dV}{dx} - i\frac{dV}{dy}\right), \quad \frac{dV}{dy_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{dV}{dx} + i\frac{dV}{dy}\right),$$

et par conséquent

$$\frac{d(W + iV)}{dy_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dx} + i\frac{dW}{dy} + i\frac{dV}{dx} - \frac{dV}{dy}\right) = 0,$$

$$\frac{d(W - iV)}{dx_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dx} - i\frac{dW}{dy} - i\frac{dV}{dx} - \frac{dV}{dy}\right) = 0.$$

L'équation (9) s'intègre donc par deux quadratures, et donne l'équation générale des surfaces d'étendue minimum

$$\zeta' = \frac{ai}{2}[f(x + iy) - F(x - iy)],$$

ou, en évitant les fonctions imaginaires,

$$(10) \quad \zeta' = \frac{ai}{2}\{\varphi(x + iy) - \varphi(x - iy) + i[\psi(x + iy) + \psi(x - iy)]\},$$

φ et ψ étant des fonctions réelles.

III.

L'équation (9), ou son intégrale (10), fournit immédiatement le résultat énoncé ci-dessus, savoir : que toutes les surfaces d'étendue minimum peuvent être regardées comme des transformées de la caténoïde. En effet, l'une quelconque de ces surfaces étant donnée, et son équation étant mise sous la forme (10), si l'on détermine deux fonctions réelles de x et y, W et V, de telle sorte que

$$W + iV = \varphi'(x + iy) + i\psi'(x + iy),$$
$$W - iV = \varphi'(x - iy) - i\psi'(x - iy),$$

ou bien

$$2W = \varphi'(x + iy) + \varphi'(x - iy),$$
$$2V = \psi'(x + iy) + \psi'(x - iy),$$

l'équation (9), qui est celle de la transformée de la caténoïde correspondant à ces deux fonctions W et V, représentera une surface identique à la surface donnée, aux constantes près d'intégration.

Sans chercher quelles sont les diverses conséquences auxquelles pourrait conduire cette remarque, nous nous bornerons ici à ce qui concerne la formation de l'équation d'une surface d'étendue minimum passant par une courbe plane donnée. Et d'abord, nous pouvons toujours choisir l'axe des ζ perpendiculaire au plan de cette courbe; supposons en outre, pour plus de facilité, que ce soit l'ellipse représentée par l'équation

$$\frac{\xi'^2}{\alpha^2} + \frac{\eta'^2}{\beta^2} = 1,$$

il sera facile de généraliser la méthode et de l'appliquer à une courbe quelconque.

Posons, pour abréger,

$$W + iV = f(x_1), \quad W - iV = F(y_1).$$

Lorsque le point ξ', η', ζ' décrira l'ellipse, le point ξ, η, ζ décrira sur la caténoïde une certaine courbe telle, que pour chacun de ses points on ait

$$(11) \qquad f(x_1)\,dx_1 = F(y_1)\,dy_1,$$

puisque ζ' doit rester constant, et qu'en même temps les équations (8) soient vérifiées, ou, ce qui revient au même, la première de ces équations (8) avec la condition $pd\xi' + qd\eta' = d\zeta'$.

On aura donc, pour $d\zeta' = 0$,

$$pd\xi' + qd\eta' = 0, \quad \text{d'où} \quad \operatorname{tang} x = \frac{q}{p} = \frac{-d\xi'}{d\eta'}.$$

Mais de l'équation de l'ellipse, on tire

$$\frac{d\eta'}{d\xi'} = \frac{-\beta^2\xi'}{\alpha^2\eta'};$$

donc

$$\frac{\alpha^2\eta'}{\beta^2\xi'} = \operatorname{tang} x, \quad \frac{\frac{\eta'}{\beta}}{\beta\sin x} = \frac{\frac{\xi'}{\alpha}}{\alpha\cos x} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2\cos^2 x + \beta^2\sin^2 x}},$$

d'où

$$\xi' = \frac{\alpha^2 \cos x}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x}}, \qquad \eta' = \frac{\beta^2 \sin x}{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x}},$$

$$d\xi' = \frac{-\alpha^2 \beta^2 \sin x dx}{(\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}, \quad d\eta' = \frac{\alpha^2 \beta^2 \cos x dx}{(\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc, en vertu de la première des équations (8) et de l'équation (11), on doit avoir, lorsque le point ξ', η', ζ' décrit l'ellipse,

$$\frac{2\alpha^2 \beta^2 \sin x dx}{a(\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} = f(x_1) dx_1 (\sin x_1 + \sin y_1) = 2 \sin x \cos iy f(x_1) dx_1$$

ou bien

$$\frac{\alpha^2 \beta^2 dx}{a \cos iy (\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} = f(x_1) dx_1 = \mathrm{F}(y_1) dy_1.$$

Cette équation devant avoir lieu quand le point ξ, η, ζ décrit une certaine courbe sur la caténoïde, nous pouvons nous donner arbitrairement cette courbe, en posant $y = \varphi(x)$, d'où

$$x_1 = x + i\varphi(x), \quad y_1 = x - i\varphi(x),$$

et, par suite,

$$x = \varpi(x_1) = \theta(y_1),$$

les fonctions ϖ et θ ne différant que par le signe de i. On a par conséquent aussi

$$iy = x_1 - \varpi(x_1) = \theta(y_1) - y_1.$$

Maintenant, si l'on prend pour $f(x_1)$ et $\mathrm{F}(y_1)$ les deux fonctions suivantes

$$f(x_1) = \frac{\alpha^2 \beta^2 \varpi'(x_1)}{a \cos[x_1 - \varpi(x_1)][\alpha^2 \cos^2 \varpi(x_1) + \beta^2 \sin^2 \varpi(x_1)]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\mathrm{F}(y_1) = \frac{\alpha^2 \beta^2 \theta'(y_1)}{a \cos[y_1 - \theta(y_1)][\alpha^2 \cos^2 \theta(y_1) + \beta^2 \sin^2 \theta(y_1)]^{\frac{3}{2}}},$$

l'équation

$$d\zeta' = \frac{ai}{2}[f(x_1) dx_1 - \mathrm{F}(y_1) dy_1]$$

représentera une certaine surface d'étendue minimum, et il est évident que lorsqu'on posera, dans l'équation de cette surface, $\varpi(x_1) = x$, ou, ce qui revient au même, $\theta(y_1) = x$, on obtiendra une courbe de niveau dont l'équation différentielle sera précisément celle de l'ellipse donnée. Cette surface passera donc par une courbe égale et parallèle à cette ellipse, et que l'on pourra amener à coïncider avec elle, par une détermination convenable des constantes d'intégration.

Proposons-nous, pour prendre un exemple simple, de déterminer la surface de telle sorte que, lorsque le point ξ', η', ζ' décrira l'ellipse, le point ξ, η, ζ décrive un parallèle de la caténoïde, défini par la condition $y = y_0$. On aura alors

$$x_1 = x + iy_0, \quad y_1 = x - iy_0,$$
$$x = x_1 - iy_0 = y_1 + iy_0.$$

Nous poserons donc

$$f(x_1) = \frac{\alpha^2 \beta^2}{a \cos iy_0 [\alpha^2 \cos^2 (x_1 - iy_0) + \beta^2 \sin^2 (x_1 - iy_0)]^{\frac{3}{2}}},$$

$$F(y_1) = \frac{\alpha^2 \beta^2}{a \cos iy_0 [\alpha^2 \cos^2 (y_1 + iy_0) + \beta^2 \sin^2 (y_1 + iy_0)]^{\frac{3}{2}}}.$$

On voit par là que, réciproquement, si m, n, p, k représentent des nombres donnés, l'équation

$$d\zeta' = \frac{ki}{2}\left[\frac{dx_1}{(m^2 \cos^2 x_1 + n^2 \sin^2 x_1 + 2pi \sin x_1 \cos x_1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{dy_1}{(m^2 \cos^2 y_1 + n^2 \sin^2 y_1 - 2pi \sin y_1 \cos y_1)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

est celle d'une surface d'étendue minimum dont une des courbes de niveau est une ellipse. Les axes de cette ellipse, qui sont parallèles aux axes des ξ et des η, se détermineront aisément, en identifiant les fonctions de x_1 et de y_1 que renferme cette équation, avec celles qui sont écrites ci-dessus.

NOTE

SUR

LES SYSTÈMES DE SURFACES ORTHOGONALES;

PAR M. V. PUISEUX.

J'entends, suivant l'usage, par *système de surfaces orthogonales* l'ensemble de trois groupes de surfaces tels, que toute surface de l'un quelconque des groupes soit coupée à angles droits par toutes celles des deux autres. Les surfaces d'un même groupe peuvent être représentées par une équation entre les coordonnées x, y, z et un paramètre qui varie d'une surface à l'autre : cette équation, si on la résout par rapport au paramètre, le donnera égal à une fonction de x, y, z qu'on peut concevoir développée en série suivant les puissances entières et positives de ces variables. Aux trois groupes de surfaces orthogonales répondront trois développements de ce genre : je me propose dans cette Note d'exprimer les coefficients de ces trois séries à l'aide d'indéterminées qu'on puisse choisir arbitrairement, en sorte qu'en attribuant à ces indéterminées toutes les valeurs possibles, on obtienne tous les systèmes possibles de surfaces orthogonales. Ce calcul, qui se réduit à la résolution d'équations linéaires, s'effectue aisément, comme on va le voir, pour les coefficients des termes d'un degré inférieur au quatrième ; il devient plus compliqué à mesure que l'on considère des termes d'un degré plus élevé.

En se bornant, comme je le fais ici, aux termes du troisième degré, on obtient pour les coefficients des expressions d'où résultent immédiatement les beaux théorèmes de MM. Dupin et Lamé sur les surfaces orthogonales. La même analyse rend évidente cette remarque déjà faite par M. Bouquet (*Journal de Mathématiques*, t. XI, p. 446), qu'un groupe de surfaces pris au hasard ne peut pas en général faire partie d'un système orthogonal.

Soient X, Y, Z trois fonctions de x, y, z telles, qu'en les égalant à

des paramètres arbitraires, on ait les équations de trois groupes de surfaces orthogonales. Supposons, ce qui est permis, les axes de coordonnées dirigés suivant les normales aux trois surfaces qui passent par l'origine O. Cette origine pouvant être un point quelconque, il est également permis de supposer les fonctions X, Y, Z développées suivant les puissances entières et positives de x, y, z en des séries qui seront convergentes, au moins pour de petites valeurs de x, y, z. Ces fonctions doivent satisfaire aux trois équations de condition

$$(1)\qquad \frac{dY}{dx}\frac{dZ}{dx}+\frac{dY}{dy}\frac{dZ}{dy}+\frac{dY}{dz}\frac{dZ}{dz}=0,$$

$$(2)\qquad \frac{dZ}{dx}\frac{dX}{dx}+\frac{dZ}{dy}\frac{dX}{dy}+\frac{dZ}{dz}\frac{dX}{dz}=0,$$

$$(3)\qquad \frac{dX}{dx}\frac{dY}{dx}+\frac{dX}{dy}\frac{dY}{dy}+\frac{dX}{dz}\frac{dY}{dz}=0,$$

qui expriment que les surfaces des trois groupes se coupent mutuellement à angles droits. De là résultent, entre les coefficients des développements en séries de X, Y, Z, des relations que nous allons chercher.

Nous pouvons admettre que les surfaces des trois groupes qui passent par l'origine répondent à des valeurs nulles des trois paramètres; car il suffirait pour remplir cette condition, si elle n'avait pas lieu, d'augmenter ces paramètres de quantités constantes. Les fonctions X, Y, Z s'annulant pour $x=0$, $y=0$, $z=0$, posons

$$X = ax + by + cz + \ldots,$$

les termes non écrits étant au moins du second degré. Mais les cosinus des angles que fait avec les axes la normale à la surface $X=0$ au point O sont proportionnels à a, b, c, et, d'un autre côté, cette normale doit se confondre avec l'axe des x : on a donc $b=0$, $c=0$. En outre, en multipliant par un facteur convenable le paramètre des surfaces X, on rendra le coefficient a égal à 1 : nous pouvons donc poser

$$X = x + ax^2 + dy^2 + gz^2 + 2Ayz + 2Fzx + 2Hxy + \ldots,$$

les termes non écrits étant au moins du troisième degré, et pareille-

ment

$$Y = y + by^2 + ez^2 + hx^2 + 2Bzx + 2Dxy + 2Iyz + \ldots,$$
$$Z = z + cz^2 + fx^2 + iy^2 + 2Cxy + 2Eyz + 2Gzx + \ldots.$$

En substituant ces valeurs de Y et de Z dans l'équation (1), on trouve qu'elle devient

$$(B + C)x + (I + i)y + (E + e)z + \ldots = 0,$$

les termes non écrits étant du second degré au moins. Cette équation devant avoir lieu quelles que soient x, y, z, il en résulte

$$B + C = 0, \quad I + i = 0, \quad E + e = 0.$$

On trouvera de même à l'aide des équations (2) et (3), ou par la permutation des lettres,

$$C + A = 0, \quad G + g = 0, \quad F + f = 0,$$
$$A + B = 0, \quad H + h = 0, \quad D + d = 0.$$

Il suit de là

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$

$$D = -d, \quad E = -e, \quad F = -f, \quad G = -g, \quad H = -h, \quad I = -i.$$

On a donc

$$X = x + ax^2 + dy^2 + gz^2 - 2fzx - 2hxy + \ldots,$$
$$Y = y + by^2 + ez^2 + hx^2 - 2dxy - 2iyz + \ldots,$$
$$Z = z + cz^2 + fx^2 + iy^2 - 2eyz - 2gzx + \ldots,$$

où les neuf constantes a, b, c, d, e, f, g, h, i peuvent être prises arbitrairement.

Poussons maintenant les développements jusqu'aux termes du troisième degré, et posons

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = x + ax^2 + dy^2 + gz^2 - 2fzx - 2hxy + jx^3 + my^3 + pz^3 \\ + \alpha y^2 z + \delta yz^2 + \eta z^2 x + \varkappa zx^2 + \nu x^2 y + \rho xy^2 + \upsilon xyz + \ldots, \end{array} \right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} Y &= y + by^2 + cz^2 + hx^2 - 2dxy - 2iyz + ky^3 + nz^3 + qx^3 \\ &+ \beta z^2 x + \varepsilon zx^2 + \theta x^2 y + \lambda xy^2 + \xi y^2 z + \sigma yz^2 + \varphi xyz + \ldots, \end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} Z &= z + ez^2 + fx^2 + iy^2 - 2eyz - 2gzx + lz^3 + ox^3 + ry^3 \\ &+ \gamma x^2 y + \zeta xy^2 + \iota y^2 z + \mu yz^2 + \varpi z^2 x + \tau zx^2 + \chi xyz + \ldots, \end{aligned}\right.$$

les termes non écrits étant au moins du quatrième degré.

En substituant dans l'équation (1) les valeurs de Y et de Z qui viennent d'être écrites, on trouvera

$$\begin{aligned} &(4fh + \gamma + \varepsilon)x^2 + (4bi + 4ei + 3r + \xi)y^2 + (4ce + 4ei + 3n + \mu)z^2 \\ &+ (4dg - 4be - 4ci - 4e^2 - 4i^2 + 2\iota + 2\sigma)yz \\ &+ (4de - 4eg - 4gh + 2\beta + \chi)zx + (4gi - 4df - 4di + 2\zeta + \varphi)xy \\ &+ \ldots = 0, \end{aligned}$$

les termes non écrits étant du troisième degré au moins. Cette équation devant avoir lieu quelles que soient x, y, z, il en résulte

$$(a_1)\qquad 4fh + \gamma + \varepsilon = 0,$$

$$(a_2)\qquad 4bi + 4ei + 3r + \xi = 0,$$

$$(a_3)\qquad 4ce + 4ei + 3n + \mu = 0,$$

$$(a_4)\qquad 2dg - 2be - 2ci - 2e^2 - 2i^2 + \iota + \sigma = 0,$$

$$(a_5)\qquad 4de - 4eg - 4gh + 2\beta + \chi = 0,$$

$$(a_6)\qquad 4gi - 4df - 4di + 2\zeta + \varphi = 0.$$

On trouvera de même à l'aide des équations (2) et (3), ou par la permutation des lettres,

$$(b_1)\qquad 4di + \alpha + \zeta = 0,$$

$$(b_2)\qquad 4cg + 4fg + 3p + \varpi = 0,$$

$$(b_3)\qquad 4af + 4fg + 3o + \varkappa = 0,$$

$$(b_4)\qquad 2eh - 2cf - 2ag - 2f^2 - 2g^2 + \eta + \tau = 0,$$

$$(b_5)\qquad 4ef - 4fh - 4hi + 2\gamma + \upsilon = 0,$$

$$(b_6)\qquad 4gh - 4de - 4eg + 2\delta + \chi = 0,$$

$$(c_1) \qquad 4eg + \beta + \delta = 0,$$
$$(c_2) \qquad 4ah + 4dh + 3q + \nu = 0,$$
$$(c_3) \qquad 4bd + 4dh + 3m + \lambda = 0,$$
$$(c_4) \qquad 2fi - 2ad - 2bh - 2d^2 - 2h^2 + \theta + \rho = 0,$$
$$(c_5) \qquad 4df - 4di - 4gi + 2\alpha + \varphi = 0,$$
$$(c_6) \qquad 4hi - 4ef - 4fh + 2\varepsilon + \upsilon = 0.$$

Les trente coefficients j, k, l, m, n, o, p, q, r, α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, $\varkappa$, λ, μ, ν, ξ, ϖ, ρ, σ, τ, υ, φ, χ des termes du troisième degré devant satisfaire à ces dix-huit équations, pourront s'exprimer au moyen des neuf quantités a, b, c, d, e, f, g, h, i et de douze nouvelles arbitraires. Et d'abord, des équations (a_2), (b_2), (c_2), (a_3), (b_3), (c_3), nous tirons

$$(7) \qquad \begin{cases} \varkappa = -4af - 4fg - 3o, \\ \lambda = -4bd - 4dh - 3m, \\ \mu = -4ce - 4ei - 3n, \end{cases}$$

$$(8) \qquad \begin{cases} \nu = -4ah - 4dh - 3q, \\ \xi = -4bi - 4ei - 3\tau, \\ \varpi = -4cg - 4fg - 3p; \end{cases}$$

les équations (a_5), (b_5), (c_5), (a_6), (b_6), (c_6) nous donnent ensuite

$$\alpha = 2di + 2gi - 2df - \tfrac{1}{2}\varphi, \qquad \beta = 2eg + 2gh - 2de - \tfrac{1}{2}\chi,$$
$$\gamma = 2fh + 2hi - 2ef - \tfrac{1}{2}\upsilon, \qquad \delta = 2de + 2eg - 2gh - \tfrac{1}{2}\chi,$$
$$\varepsilon = 2ef + 2fh - 2hi - \tfrac{1}{2}\upsilon, \qquad \zeta = 2df + 2di - 2gi - \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Portons ces dernières valeurs dans les équations (a_1), (b_1), (c_1), et nous trouverons

$$(9) \qquad \upsilon = 8fh, \quad \varphi = 8di, \quad \chi = 8eg,$$

d'où il résulte

$$(10)\quad \alpha = 2(gi - df - di),\quad \beta = 2(gh - de - eg),\quad \gamma = 2(hi - ef - fh),$$
$$(11)\quad \delta = 2(de - eg - gh),\quad \varepsilon = 2(ef - fh - hi),\quad \zeta = 2(df - di - gi).$$

Il reste à satisfaire aux équations (a_4), (b_4), (c_4), et pour cela il suffira de prendre

$$(12)\quad \begin{cases} \eta = 2(f^2 + g^2 + ag + cf - eh) - \tau, \\ \theta = 2(d^2 + h^2 + bh + ad - fi) - \rho, \\ \iota = 2(e^2 + i^2 + ci + be - dg) - \sigma. \end{cases}$$

On voit donc qu'en outre des neuf quantités a, b, c, d, e, f, g, h, i qui figurent dans les coefficients des termes du second degré, on pourra se donner arbitrairement les douze quantités j, k, l, m, n, o, p, q, r, ρ, σ, τ, et qu'alors les dix-huit autres coefficients des termes du troisième degré, savoir : α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, $\varkappa$, λ, μ, ν, ξ, ϖ, υ, φ, χ, seront déterminés par les formules (7), (8), (9), (10), (11), (12).

En continuant de la même manière, on trouvera que les coefficients des quarante-cinq termes du quatrième degré dans les fonctions X, Y, Z peuvent s'exprimer au moyen des vingt et une arbitraires précédentes et de quinze nouvelles; et généralement, si l'on pousse le développement de ces fonctions jusqu'aux termes du $n^{ième}$ degré, tous les coefficients pourront s'exprimer à l'aide de $\frac{3(n-1)(n+4)}{2}$ arbitraires.

Il me reste à indiquer quelques conséquences des formules qui précèdent.

Considérons la surface $Z = 0$. De ce que le terme en xy manque dans le développement de Z, on conclut qu'au point O les lignes de courbure de cette surface sont tangentes aux axes Ox, Oy. Mais les intersections de la même surface par les surfaces $Y = 0$, $X = 0$ sont aussi tangentes à ces axes : ces intersections sont donc tangentes en O aux lignes de courbure $Z = 0$. Comme d'ailleurs le point O est un point quelconque de l'espace, on voit que chacune de ces intersections est en tous ses points tangente à une des lignes de courbure de $Z = 0$, et par conséquent se confond avec une de ces lignes de courbure. On retrouve ainsi le théorème de M. Dupin, que dans un système de sur-

faces orthogonales chaque surface d'un groupe est coupée par celles des deux autres groupes suivant ses lignes de courbure [*].

Parmi les relations établies ci-dessus entre les coefficients des séries X, Y, Z, il y en a une, savoir :

$$\chi = 8eg,$$

qui ne contient que des coefficients de Z. Cette équation suffit pour établir qu'un groupe de surfaces ne peut pas en général faire partie d'un système orthogonal : car l'équation qui représente ce groupe, étant rapportée à des axes convenables et résolue par rapport au paramètre variable ω, pourra bien se ramener à la forme

$$\begin{aligned}\omega = z + cz^2 + fx^2 + iy^2 - 2eyz - 2gzx + lz^3 + ox^3 + ry^3 \\ + \gamma x^2 y + \zeta xy^2 + \iota y^2 z + \mu yz^2 + \varpi z^2 x + \tau zx^2 + \chi xyz + \ldots;\end{aligned}$$

mais il n'arrivera pas en général qu'on ait

$$\chi = 8eg.$$

Les développements des fonctions X, Y, Z ayant été poussés jusqu'aux termes du troisième degré, nous pouvons en déduire les variations différentielles au point O des rayons de courbure principaux de nos surfaces. A cet effet, regardons x, y, z comme de petites quantités du premier ordre, et formons, en y négligeant les quantités du second ordre, l'équation qui a pour racines les deux rayons de courbure principaux de la surface X = const. au point (x, y, z). En désignant par R l'un quelconque de ces rayons, et prenant pour X la valeur donnée par la formule (4), nous trouverons

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{R}\right)^2 + 2\left[\begin{array}{c} d + g - (2ad + 2ag + 4f^2 + 4h^2 - \eta - \rho)x \\ + (6dh + 2gh + 3m + \delta)y + (6fg + 2df + 3p + \alpha)z \end{array}\right]\frac{1}{R} \\ + 4\left[\begin{array}{c} dg - (4adg + 4df^2 + 4gh^2 - d\eta - g\rho)x \\ + (8dgh + d\delta + 3gm)y + (8dfg + g\alpha + 3dp)z \end{array}\right] + \ldots = 0,\end{aligned}$$

[*] Dans ses leçons au Collége de France, M. Liouville a démontré le même théorème en développant en série, non pas la valeur du paramètre, mais celle de l'une des coordonnées x, y, z regardée comme fonction des deux autres.

les termes non écrits étant du deuxième ordre au moins. Nommons A_y, A_z les rayons de courbure principaux de la surface $X = \text{const.}$ au point (x, y, z), savoir : A_y celui de la section principale tangente à la courbe

$$X = \text{const.}, \quad Z = \text{const.},$$

et A_z celui de la section principale tangente à la courbe

$$X = \text{const.}, \quad Y = \text{const.};$$

A_y sera celle des deux valeurs de R qui est très-voisine de $-\frac{1}{2d}$, tandis que A_z sera très-voisin de $-\frac{1}{2g}$. On aura donc, aux quantités près du second ordre,

$$\frac{1}{A_y} = -2d + 2(2ad + 4h^2 - \rho)x - 6(2dh + m)y - 2(2df + \alpha)z + \ldots,$$
$$\frac{1}{A_z} = -2g + 2(2ag + 4f^2 - \eta)x - 2(2gh + \delta)y - 6(2fg + p)z + \ldots,$$

ou bien, en exprimant les coefficients des seconds membres au moyen des quantités indépendantes $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, \rho, \sigma, \tau$,

$$\frac{1}{A_y} = -2d + 2(2ad + 4h^2 - \rho)x - 6(2dh + m)y + 4(d - g)iz + \ldots,$$
$$\frac{1}{A_z} = -2g + 2(2f^2 - 2g^2 - 2cf + 2eh + \tau)x - 2(d - g)ey$$
$$- 6(2fg + p)z + \ldots.$$

Il suit de là qu'au point O on a non-seulement

$$(13) \qquad \frac{1}{A_y} = -2d, \quad \frac{1}{A_z} = -2g,$$

mais encore

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{d\frac{1}{A_y}}{dx} = 2(2ad + 4h^2 - \rho), & \dfrac{d\frac{1}{A_y}}{dy} = -6(2dh + m), & \dfrac{d\frac{1}{A_y}}{dz} = 4(d - g)i, \\ \dfrac{d\frac{1}{A_z}}{dx} = 2(2f^2 - 2g^2 - 2cf + 2eh + \tau), & \dfrac{d\frac{1}{A_z}}{dy} = -4(d - g)e, & \dfrac{d\frac{1}{A_z}}{dz} = -6(2fg + p). \end{array} \right.$$

Nommons pareillement B_z et B_x les rayons de courbure principaux de la surface $Y = \text{const.}$, savoir : B_z celui de la section principale tangente à la courbe

$$Y = \text{const.}, \quad X = \text{const.},$$

et B_x celui de la section principale tangente à la courbe

$$Y = \text{const.}, \quad Z = \text{const.}$$

Enfin appelons C_x et C_y les rayons de courbure principaux de la surface $Z = \text{const.}$, savoir : C_x celui de la section principale tangente à la courbe

$$Z = \text{const.}, \quad Y = \text{const.},$$

et C_y celui de la section principale tangente à la courbe

$$Z = \text{const.}, \quad X = \text{const.}$$

En raisonnant comme on l'a fait pour établir les équations (13) et (14), ou bien en permutant les lettres qui y figurent, on trouvera qu'on a, au point O,

$$(15) \qquad \frac{1}{B_z} = -2e, \quad \frac{1}{B_x} = -2h,$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{d\frac{1}{B_z}}{dy} = 2(2be + 4i^2 - \sigma), & \dfrac{d\frac{1}{B_z}}{dz} = -6(2ei + n), & \dfrac{d\frac{1}{B_z}}{dx} = 4(e - h)g, \\[2ex] \dfrac{d\frac{1}{B_x}}{dy} = 2(2d^2 - 2h^2 - 2ad + 2fi + \rho), & \dfrac{d\frac{1}{B_x}}{dz} = -2(e - h)f, & \dfrac{d\frac{1}{B_x}}{dx} = -6(2dh + q), \end{array} \right.$$

et encore

$$(17) \qquad \frac{1}{C_x} = -2f, \quad \frac{1}{C_y} = -2i,$$

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{d\frac{1}{C_x}}{dz} = 2(2cf + 4g^2 - \tau), & \dfrac{d\frac{1}{C_x}}{dx} = -6(2fg + o), & \dfrac{d\frac{1}{C_x}}{dy} = 4(f - i)h, \\[2ex] \dfrac{d\frac{1}{C_y}}{dz} = 2(2e^2 - 2i^2 - 2be + 2dg + \sigma), & \dfrac{d\frac{1}{C_y}}{dx} = -2(f - i)d, & \dfrac{d\frac{1}{C_y}}{dy} = -6(2ei + r). \end{array} \right.$$

Dans les équations (14), (16) et (18), remplaçons d, e, f, g, h, i, par leurs valeurs tirées des équations (13), (15) et (17); il viendra, toujours pour le point O,

$$\frac{d\frac{1}{A_y}}{dx} = \frac{2}{B_x^2} - \frac{2a}{A_y} - 2\rho, \tag{19}$$

$$\frac{d\frac{1}{A_y}}{dy} = -\frac{3}{A_y B_x} - 6m, \tag{20}$$

$$\frac{d\frac{1}{A_y}}{dz} = \left(\frac{1}{A_y} - \frac{1}{A_z}\right)\frac{1}{C_y}, \tag{21}$$

$$\frac{d\frac{1}{A_z}}{dx} = \frac{1}{C_x^2} - \frac{1}{A_z^2} - \frac{1}{B_x B_z} + \frac{2c}{C_x} + 2\tau, \tag{22}$$

$$\frac{d\frac{1}{A_z}}{dy} = \left(\frac{1}{A_z} - \frac{1}{A_y}\right)\frac{1}{B_z}, \tag{23}$$

$$\frac{d\frac{1}{A_z}}{dz} = -\frac{3}{C_x A_z} - 6p, \tag{24}$$

$$\frac{d\frac{1}{B_z}}{dy} = \frac{2}{C_y^2} - \frac{2b}{B_z} - 2\sigma, \tag{25}$$

$$\frac{d\frac{1}{B_z}}{dz} = -\frac{3}{B_z C_y} - 6n, \tag{26}$$

$$\frac{d\frac{1}{B_z}}{dx} = \left(\frac{1}{B_z} - \frac{1}{B_x}\right)\frac{1}{A_z}, \tag{27}$$

$$\frac{d\frac{1}{B_x}}{dy} = \frac{1}{A_y^2} - \frac{1}{B_x^2} - \frac{1}{C_y C_x} + \frac{2a}{A_y} + 2\rho, \tag{28}$$

$$\frac{d\frac{1}{B_x}}{dz} = \left(\frac{1}{B_x} - \frac{1}{B_z}\right)\frac{1}{C_x}, \tag{29}$$

$$(30)\qquad \frac{d\frac{1}{B_x}}{dx} = -\frac{3}{A_y B_x} - 6q.$$

$$(31)\qquad \frac{d\frac{1}{C_x}}{dz} = \frac{2}{A_z^2} - \frac{2c}{C_x} - 2\tau,$$

$$(32)\qquad \frac{d\frac{1}{C_x}}{dx} = -\frac{3}{C_x A_z} - 6o,$$

$$(33)\qquad \frac{d\frac{1}{C_x}}{dy} = \left(\frac{1}{C_x} - \frac{1}{C_y}\right)\frac{1}{B_x},$$

$$(34)\qquad \frac{d\frac{1}{C_y}}{dz} = \frac{1}{B_z^2} - \frac{1}{C_y^2} - \frac{1}{A_z A_y} + \frac{2b}{B_z} + 2\sigma,$$

$$(35)\qquad \frac{d\frac{1}{C_y}}{dx} = \left(\frac{1}{C_y} - \frac{1}{C_x}\right)\frac{1}{A_y},$$

$$(36)\qquad \frac{d\frac{1}{C_y}}{dy} = -\frac{3}{B_z C_y} - 6r.$$

Remarquons spécialement les six formules (21), (23), (27), (29), (33), (35), et aussi ces trois autres qui résultent immédiatement de la combinaison des équations précédentes :

$$\frac{d\frac{1}{A_y}}{dx} + \frac{d\frac{1}{B_x}}{dy} = \frac{1}{A_y^2} + \frac{1}{B_x^2} - \frac{1}{C_x C_y},$$

$$\frac{d\frac{1}{B_z}}{dy} + \frac{d\frac{1}{C_y}}{dz} = \frac{1}{B_z^2} + \frac{1}{C_y^2} - \frac{1}{A_y A_z},$$

$$\frac{d\frac{1}{C_x}}{dz} + \frac{d\frac{1}{A_z}}{dx} = \frac{1}{C_x^2} + \frac{1}{A_z^2} - \frac{1}{B_z B_x}.$$

Dans ces neuf équations, qui ne renferment avec les dérivées des rayons de courbure principaux que ces rayons eux-mêmes, on peut

regarder dx, dy, dz comme les différentielles des arcs des trois courbes formées par les trois intersections mutuelles des surfaces $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, prises deux à deux. Ces équations acquièrent alors une signification indépendante du choix des axes de cordonnées, et elles s'appliquent, non-seulement à l'origine, mais à un point quelconque de l'espace. Ainsi entendues, elles ne sont autre chose que les formules connues de M. Lamé.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX CONCERNANT DES FONCTIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Soit m un nombre entier donné et n un nombre entier quelconque premier à m (l'unité est toujours une des valeurs de n). Soit de plus

$$n = d\delta,$$

en sorte que d représente un quelconque des diviseurs de n et δ le diviseur conjugué. Nous posons ces définitions et ces notations une fois pour toutes. On voit que l'entier n peut prendre une infinité de valeurs, et qu'à chaque valeur déterminée de n répondent en général diverses valeurs de d, δ. Mais n, d et δ n'ont jamais de facteur premier commun avec l'entier fixe m.

Cela étant, considérons cinq fonctions numériques de n, savoir

$$A(n),\ G(n),\ H(n),\ P(n),\ Q(n),$$

vérifiant, pour chacune des valeurs indiquées de n, les deux relations

$$(1) \qquad \sum A(d)\,G(\delta) = H(n)$$

et

$$(2) \qquad \sum A(d)\,P(\delta) = Q(n),$$

où le signe

$$\sum$$

porte sur tous les groupes d, δ pour lesquels $n = d\delta$.

Il y aura naturellement une certaine relation entre les quatre fonc-

tions

$$G(n),\ H(n),\ P(n),\ Q(n).$$

C'est cette relation que fournit notre premier théorème. Il consiste en ce que les relations (1) et (2) entraînent celle-ci :

$$(3) \qquad \sum Q(d)\,G(\delta) = \sum P(d)\,H(\delta).$$

La démonstration, que nous supprimons pour le moment, est très-simple.

Remarquons en passant le cas particulier où l'on aurait toujours

$$A(d) = 1.$$

Les équations (1) et (2) se réduiraient alors à

$$\sum G(\delta) = H(n)$$

et

$$\sum P(\delta) = Q(n),$$

ou, ce qui revient au même, à

$$\sum G(d) = H(n)$$

et

$$\sum P(d) = Q(n);$$

la relation (3) subsisterait.

2. La relation (3) est le résultat d'une sorte d'élimination entre les relations (1) et (2) où figure la fonction $A(n)$ dont la relation (3) ne dépend plus. Dans le théorème que nous allons donner maintenant, il y aura deux fonctions éliminées à la fois.

Considérons en effet six fonctions numériques

$$A(n),\ B(n),\ G(n),\ H(n),\ P(n),\ Q(n),$$

vérifiant pour toutes les valeurs de n indiquées plus haut les deux

équations

$$(4) \qquad \sum A(d)\,G(\delta) = \sum B(d)\,H(\delta)$$

et

$$(5) \qquad \sum A(d)\,P(\delta) = \sum B(d)\,Q(\delta).$$

Admettons de plus que l'on n'ait pas constamment

$$A(n) = 0$$

et

$$B(n) = 0.$$

Je dis que les relations (4) et (5) entraîneront celle-ci

$$(6) \qquad \sum Q(d)\,G(\delta) = \sum P(d)\,H(\delta),$$

résultat remarquable, ce me semble, mais très-aisé encore à établir.

En considérant des fonctions numériques particulières, on tire de nos deux théorèmes une foule de conséquences plus ou moins curieuses.

3. Désignons actuellement par

$$D^{\mu}$$

un diviseur de n de l'ordre μ; en d'autres termes, soit D un diviseur de n tel, que D^{μ} divise aussi n. Puis admettons qu'entre deux fonctions numériques

$$f(n),\ F(n),$$

on ait, pour chacune des valeurs dont n est susceptible, la relation

$$(7) \qquad \sum f\left(\frac{n}{D^{\mu}}\right) = F(n),$$

le signe

$$\sum$$

portant sur toutes les valeurs que D comporte : l'unité est toujours une de ces valeurs.

Par l'équation (7), la fonction F s'exprime au moyen de la fonction f; mais on peut aussi s'en servir pour exprimer f au moyen de F.

Décomposons n en facteurs premiers sous la forme

$$n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots g^\varepsilon \ldots,$$

et distinguons les nombres premiers a, b, c,..., dont les exposants α, β, γ,... sont égaux ou supérieurs à μ, des autres, tels que g, dont l'exposant ε est plus petit que μ. La valeur de

$$f(n)$$

sera

$$F(n) - \sum F\left(\frac{n}{a^\mu}\right) + \sum F\left(\frac{n}{a^\mu b^\mu}\right) - \sum F\left(\frac{n}{a^\mu b^\mu c^\mu}\right) + \ldots;$$

les signes sont alternativement $+$ et $-$; par

$$\sum F\left(\frac{n}{a^\mu}\right),$$

on désigne la somme

$$F\left(\frac{n}{a^\mu}\right) + F\left(\frac{n}{b^\mu}\right) + F\left(\frac{n}{c^\mu}\right) + \ldots,$$

relative aux nombres premiers a, b, c,..., mais pas aux nombres premiers g, etc.; la somme

$$\sum F\left(\frac{n}{a^\mu b^\mu}\right)$$

se rapporte à leurs produits deux à deux, et ainsi de suite.

4. Je dis qu'une fonction numérique

$$\psi(n)$$

est décomposable en facteurs quand on a

$$\psi(n) = \psi(a^\alpha)\psi(b^\beta)\ldots\psi(g^\varepsilon)\ldots,$$

a, b,..., g,..., désignant, comme il a été dit ci-dessus, les facteurs premiers distincts de n, à quoi j'ajoute la condition

$$\psi(1) = 1$$

dont j'ai reconnu l'utilité. Les fonctions numériques décomposables en facteurs ont des propriétés spéciales, et il est avantageux de savoir reconnaître si une fonction dont on s'occupe présente ou non ce caractère singulier.

Or on peut d'abord prouver que si l'une des deux fonctions

$$f(n),\ \mathrm{F}(n),$$

liées entre elles par l'équation (7), est décomposable en facteurs, l'autre fonction l'est également. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} f(a^\alpha) &= \mathrm{F}(a^\alpha) - \mathrm{F}(a^{\alpha-\mu}), \\ f(b^\beta) &= \mathrm{F}(b^\beta) - \mathrm{F}(b^{\beta-\mu}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

relativement aux nombres premiers a, b,... dont les exposants α, β,... sont au moins égaux à μ, et

$$\begin{aligned} f(g^\varepsilon) &= \mathrm{F}(g^\varepsilon), \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

relativement aux autres. Le produit fournit la valeur de $f(n)$.

5. Soient

$$f(n),\ \mathrm{F}(n),\ \psi(n)$$

trois fonctions numériques liées entre elles, pour toutes les valeurs que n peut prendre comme on l'a expliqué au n° 1, par la relation

$$(8) \qquad \sum f(d)\,\psi(\delta) = \mathrm{F}(n).$$

Si deux de ces fonctions sont décomposables en facteurs, la troisième le sera aussi. Que, par exemple, $f(n)$ et $\mathrm{F}(n)$ soient décomposables

en facteurs; alors $\psi(n)$ le sera également, ce qui permettra au besoin de tirer plus facilement de l'équation (8) la valeur de $\psi(n)$.

Il en serait de même si au lieu de la relation (8) on avait celle-ci :

$$\sum f(d)\psi(\delta) = \sum \mathrm{F}(d). \tag{9}$$

6. Considérons enfin quatre fonctions numériques

$$f(n),\ \mathrm{F}(n),\ \psi(n),\ \varpi(n)$$

entre lesquelles on ait la relation

$$\sum f(d)\psi(\delta) = \sum \mathrm{F}(d)\varpi(\delta). \tag{10}$$

Si trois de ces fonctions jouissent de la propriété de se décomposer en facteurs, la quatrième aussi sera décomposable en facteurs.

7. Les propositions de nature diverse que je viens d'énoncer, et quelques autres qui les complètent, abrégent beaucoup certains calculs, et doivent (quoique fort simples) être regardées comme fondamentales dans la théorie des fonctions numériques. On en déduit une sorte d'algorithme régulier et général auquel j'ai fait allusion ailleurs (cahier de février 1858, p. 66). Je les ai démontrées et développées, il y a quelques années déjà, dans un de mes cours au Collége de France, et j'ai cru bon de disposer, pour en dire ici deux mots, de quelques pages qui restaient libres. Une autre fois j'entrerai dans tous les détails que le sujet exige quand on veut le soumettre à l'examen approfondi qu'il mérite. Observons seulement que nos théorèmes resteraient vrais si au lieu de prendre pour valeurs de n les nombres premiers à un entier donné m, on admettait tous les nombres entiers $1, 2, 3, \ldots$ sans exception. Cela revient à supposer $m = 1$, ce qui est permis. En faisant $m = 2$, on se réduirait aux nombres impairs.

MÉMOIRE

Sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope;

PAR M. DE SAINT-VENANT.

Présenté à l'Académie des Sciences le 16 mars 1863 [*].

DEUXIÈME ARTICLE [**].

§ III. — *Surfaces donnant la distribution des élasticités autour d'un même point. — Maxima et minima. — Distribution ellipsoïdale des élasticités directes. — Solides ou milieux amorphes. — Intégrabilité des équations.*

9. *Surface du quatrième degré dont les rayons vecteurs sont les inverses des racines quatrièmes des élasticités directes.* — Appliquons la formule générale (33) à l'évaluation du coefficient d'*élasticité directe* dans un sens x' quelconque, c'est-à-dire du coefficient par lequel il faut multiplier la dilatation $\partial_{x'}$ dans ce sens pour avoir la composante $p_{x'x'}$, dans le même sens, de la pression engendrée sur l'unité d'une face qui lui est perpendiculaire.

[*] *Comptes rendus des séances*, t. LVI, p. 475.

[**] *Voir* août et septembre 1863, t. VIII (2e série), p. 257.

En mettant x' pour n, s, x', y', et

en faisant $a_{x'x'x'x'} = A$, $c_{xx'} = c_x$, $c_{yx'} = c_y$, $c_{zx'} = c_z$, on a :

$$(39)\quad \begin{cases} A = [(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)^2]^2 \quad \text{ou} \\ A = a_{xxxx} c_x^4 + a_{yyyy} c_y^4 + a_{zzzz} c_z^4 + \\ \quad + 2(a_{yyzz} + 2a_{yzyz}) c_y^2 c_z^2 + 2(a_{zzxx} + 2a_{zxzx}) c_z^2 c_x^2 + 2(a_{xxyy} + 2a_{xyxy}) c_x^2 c_y^2 + \\ \quad + 4(a_{xxyz} + 2a_{zxxy}) c_x^2 c_y c_z + 4(a_{yyzx} + 2a_{xyyz}) c_y^2 c_z c_x + 4(a_{zzxy} + 2a_{yzzx}) c_z^2 c_x c_y + \\ \quad + 4a_{yyyz} c_y^3 c_z + 4a_{zzzy} c_z^3 c_y + 4a_{zzzx} c_z^3 c_x + 4a_{xxxz} c_x^3 c_z + 4a_{xxxy} c_x^3 c_y + 4a_{yyyx} c_y^3 c_x. \end{cases}$$

Si, en transportant l'origine au point (x, y, z), l'on porte à partir de ce point, sur chaque droite de direction x' qui y passe et qui fait, avec les axes, des angles dont c_x, c_y, c_z sont les cosinus, une longueur

$$\frac{1}{\sqrt[4]{A}},$$

les coordonnées de la deuxième extrémité de ce rayon vecteur seront

$$x = \frac{c_x}{\sqrt[4]{A}}, \quad y = \frac{c_y}{\sqrt[4]{A}}, \quad z = \frac{c_z}{\sqrt[4]{A}}:$$

d'où l'on déduit, en mettant $x\sqrt[4]{A}$, $y\sqrt[4]{A}$, $z\sqrt[4]{A}$ pour les trois cosinus, l'équation suivante du quatrième degré pour la surface formée par l'ensemble de ces extrémités :

$$(40)\quad \begin{cases} 1 = [(a_x x + a_y y + a_z z)^2]^2 = (a_{xx} x^2 + a_{yy} y^2 + a_{zz} z^2 + 2a_{yz} yz + 2a_{zx} zx + 2a_{xy} xy)^2 \\ \quad \text{symboliquement, ou} \\ 1 = a_{xxxx} x^4 + a_{yyyy} y^4 + a_{zzzz} z^4 + \\ \quad + 2(a_{yyzz} + 2a_{yzyz}) y^2 z^2 + 2(a_{zzxx} + 2a_{zxzx}) z^2 x^2 + 2(a_{xxyy} + 2a_{xyxy}) x^2 y^2 + \\ \quad + 4(a_{xxyz} + 2a_{zxxy}) x^2 yz + 4(a_{yyzx} + 2a_{xyyz}) y^2 zx + 4(a_{zzxy} + 2a_{yzzx}) z^2 xy + \\ \quad + 4a_{yyyz} y^3 z + 4a_{zzzy} z^3 y + 4a_{zzzx} z^3 x + 4a_{xxxz} x^3 z + 4a_{xxxy} x^3 y + 4a_{yyyx} y^3 x. \end{cases}$$

Cette surface, dont le centre est à l'origine, et que M. Macquorn-

Rankine a appelée *tasinomique* (τασις, tension) [*], a été considérée par M. Haughton, dès 1846 [**], comme pouvant fournir la loi de l'élasticité, mais sans la définir, comme nous faisons ici, par ce que représentent ses rayons vecteurs.

En effet, les *quinze* coefficients monômes ou binômes (que M. Rankine appelle *homotatiques*) de son équation donnent, les uns tels qu'ils y figurent, les autres divisés par 6, par 12 ou par 4, tous ceux des formules (1) des composantes de pression ou tension, *quand on réduit ceux-ci à quinze inégaux* ou quand on admet les six égalités (8) $a_{yyzz} = a_{yzyz}$, $a_{xxyz} = a_{zxxy}$, etc., conformément à la loi des actions moléculaires et comme faisait M. Haughton dans son premier Mémoire. On peut remarquer aussi, avec le savant Irlandais, qu'elle se déduit immédiatement de l'expression (6) du potentiel en remplaçant

$$2\Phi_1, \quad \partial_x, \quad \partial_y, \quad \partial_z, \quad g_{yz}, \quad g_{zx}, \quad g_{xy},$$

par

$$1, \quad x^2, \quad y^2, \quad z^2, \quad 2yz, \quad 2zx, \quad 2xy,$$

d'où résulte bien, comme il le remarque, que lorsqu'on rapporte la surface (40), et en même temps les dilatations et glissements, à de nouveaux axes rectangulaires x', y', z', comme

$$x^2 = (x' c_{xx'} + y' c_{xy'} + z' c_{xz'})^2$$

et

$$2yz = 2(x' c_{yx'} + y' c_{yy'} + z' c_{yz'})(x' c_{zx'} + y' c_{zy'} + z' c_{zz'})$$

développés donnent identiquement les expressions (26) de ∂_x et de g_{yz} en $\partial_{x'}, \partial_{y'}, \ldots, g_{x'y'}$ quand on remplace $\partial_{x'}$ par $x'^2, \ldots, g_{x'y'}$ par $2x'y'$, les coefficients nouveaux de l'équation de la surface (40) seront encore les mêmes que les coefficients nouveaux du potentiel (6). Mais cela résulte également de notre expression (39) de $a_{x'x'x'x'}$ [***].

---

[*] *On Axes of Elasticity and crystalline Forms* (*Transactions of the Royal Society*, London, 1855), p. 268.

[**] *On Equilibrium and Motion of solid and fluid Bodies* (*Transactions of Irish Academy*, vol. XXI), p. 164.

[***] S'il faut décrire graphiquement cette surface en en traçant par points diverses

10. *Élasticités directes maxima et minima.* — On les obtient en égalant à zéro la différentielle complète de l'expression (39) ou de

$$A = a_{x'x'} . a_{x'x'}; \quad a_{x'x'} \text{ étant} = a_{x'}a_{x'}; \text{ et } a_{x'} \text{ étant} = a_x c_{xx'} + a_y c_{yx'} + a_z c_{zx'},$$

par rapport aux trois cosinus, ce qui donne

$$4 a_{x'x'} . a_{x'} (a_x dc_{xx'} + a_y dc_{yx'} + a_z dc_{zx'}) = 0,$$

et égalant, par suite, aussi à zéro ce qui affecte deux des différentielles des cosinus quand on a éliminé la troisième au moyen de

$$c_{xx'} dc_{xx'} + c_{yx'} dc_{yx'} + c_{zx'} dc_{zx'} = 0 \quad \text{résultant de} \quad c^2_{xx'} + c^2_{yx'} + c^2_{zx'} = 1.$$

On trouve ainsi

$$(41) \qquad \frac{a_{x'x'} . a_{x'} a_x}{c_{xx'}} = \frac{a_{x'x'} . a_{x'} a_y}{c_{yx'}} = \frac{a_{x'x'} . a_{x'} a_z}{c_{zx'}} = A;$$

le quatrième membre de cette égalité multiple résultant de ce qu'on obtient une fraction égale à celles des trois premiers membres en prenant pour numérateur la somme de leurs numérateurs, et pour dénominateur la somme de leurs dénominateurs, après les avoir multipliées haut et bas par $c_{xx'}$, $c_{yx'}$, $c_{zx'}$ respectivement.

Comme les polynômes numérateurs sont du troisième degré en $c_{xx'}$, $c_{yx'}$, $c_{zx'}$, les trois premiers membres donnent, en chassant les déno-

---

coupes, on le fera plus facilement au moyen de l'expression (39) $A = a_{xxxx} c_x^4 + \ldots$ regardée comme son équation en coordonnées polaires, en remplaçant le premier membre par l'inverse $\frac{1}{r^4}$ de la quatrième puissance du rayon vecteur et en déterminant ce rayon r pour différents angles (x', x), (x', y), (x', z) en degrés, qu'en se servant de l'équation (40) en coordonnées rectangles. La surface qui aurait pour rayons vecteurs les coefficients d'élasticité directe $a_{x'x'x'x'} = A$ eux-mêmes serait tout aussi facile à tracer; mais elle est du dixième degré, car, en faisant $c_x = \frac{x}{A}$, $c_y = \frac{y}{A}$, $c_z = \frac{z}{A}$ et $A = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dans l'équation (39), on a $(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}} =$ le second membre $a_{xxxx} x^4 +$ etc. de l'équation (40).

minateurs, deux équations du quatrième degré en

$$\frac{c_{yx'}}{c_{xx'}}, \quad \frac{c_{zx'}}{c_{xx'}},$$

propres à fournir, après élimination, seize valeurs réelles ou imaginaires de ces deux rapports, qui déterminent les directions x'.

D'où, généralement, *seize* maxima ou minima de l'élasticité directe A ou $a_{x'x'x'x'}$,

Ou seize diamètres coupant normalement la surface (40).

Toute dilatation $\partial_{x'}$ dans la direction d'un de ces diamètres n'engendre, sur un plan qui lui est perpendiculaire, *qu'une pression normale à ce plan,* comme l'a remarqué le premier M. Rankine; car on a pour la composante tangentielle sur ce même plan, dans le sens y',

$$p_{x'y'} = a_{x'y'x'x'}\partial_{x'} = a_{x'x'x'y'}\partial_{x'} = a_{x'x'}.a_{x'}(a_x c_{xy'} + a_y c_{yy'} + a_z c_{zy'}),$$

ou, d'après (41),

$$p_{x'y'} = A c_{xx'} c_{xy'} + A c_{yx'} c_{yy'} + A c_{zx'} c_{zy'} = 0,$$

en sorte que toute pression tangentielle sur de pareils plans est nulle.

Nos mêmes notations symboliques nous serviront à démontrer au § IV, avec une égale facilité, une autre propriété remarquable de ces plans, relative à la direction des petits mouvements vibratoires.

11. *Autre surface.* — On ne peut pas en construire une qui donne de la même manière la loi de variation d'un des autres coefficients, tels que $a_{y'y'z'z'}$, $a_{x'x'y'z'}$, etc., car ils dépendent de deux ou de trois directions x', y', z' et non d'une seule comme $a_{x'x'x'x'}$.

Mais on peut construire la surface qui donne, encore par ses rayons vecteurs, ou plutôt par les inverses de leurs racines carrées, les valeurs de la somme

$$(42) \qquad a_{x'x'x'x'} + a_{x'x'y'y'} + a_{x'x'z'z'} = S_{x'}$$

de l'*élasticité directe* $a_{x'x'x'x'}$ dans le sens x', et des deux ÉLASTICITÉS LATÉRALES

$$a_{x'x'y'y'}, \quad a_{x'x'z'z'}$$

qu'on a lorsque l'on considère ce sens et deux des sens qui lui sont perpendiculaires. Cette somme, en effet, peut s'écrire

$$S_{x'} = a_{x'x'}.(a_{x'x'} + a_{y'y'} + a_{z'z'}).$$

Or la parenthèse a pour valeur symbolique, d'après la formule (33)

$$(a_x c_{xx'} + a_y c_{yx'} + a_z c_{zx'})^2 + (a_x c_{xy'} + a_y c_{yy'} + a_z c_{zy'})^2 + \\ + (a_x c_{xz'} + a_y c_{yz'} + a_z c_{zz'})^2.$$

Développant, et réduisant eu égard aux relations entre les cosinus, on trouve que

$$(43) \qquad a_{x'x'} + a_{y'y'} + a_{z'z'} = a_{xx} + a_{yy} + a_{zz}.$$

Donc, en écrivant

$$c_x, \quad c_y, \quad c_z \quad \text{pour} \quad c_{xx'}, \quad c_{yx'}, \quad c_{zx'} \quad \text{(qui sont restés seuls)},$$

on a

$$(44) \qquad S_{x'} = (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z)^2.(a_{xx} + a_{yy} + a_{zz}).$$

Tirons, à partir du point (x, y, z), en y transportant l'origine, des rayons vecteurs de longueurs égales aux valeurs de

$$\frac{1}{\sqrt{S_{x'}}},$$

relatives à leurs diverses directions x', et faisons, dans l'équation (44),

$$c_x = x\sqrt{S_{x'}}, \quad c_y = y\sqrt{S_{x'}}, \quad c_z = z\sqrt{S_{x'}};$$

nous avons, pour l'équation du lieu des extrémités de ces rayons,

$$1 = (a_{xx} + a_{yy} + a_{zz}).(a_x x + a_y y + a_z z)^2,$$

ou

$$(45) \left\{ \begin{aligned} 1 = (a_{xxxx} + a_{xxyy} + a_{xxzz})\,x^2 + (a_{xxyy} + a_{yyyy} + a_{yyzz})\,y^2 + \\ + (a_{zzxx} + a_{yyzz} + a_{zzzz})\,z^2 + \\ + 2(a_{xxyz} + a_{yyyz} + a_{zzyz})\,yz + 2(a_{xxzx} + a_{yyzx} + a_{zzzx})\,zx + \\ + (a_{xxxy} + a_{yyxy} + a_{zzxy})\,xy, \end{aligned} \right.$$

représentant un ellipsoïde qui a été considéré en 1846 par M. Haughton, et que M. Rankine a appelé *orthotatique*.

Comme, en le rapportant à ses trois axes principaux, les trois derniers termes de son équation manqueront, il se trouve démontré qu'en tout point d'un corps il existe trois directions rectangulaires x_1, y_1, z_1 pour lesquelles on a

$$(46)\qquad \begin{cases} a_{x_1x_1y_1z_1} + a_{y_1y_1y_1z_1} + a_{z_1z_1z_1y_1} = 0, \\ a_{x_1x_1x_1z_1} + a_{y_1y_1z_1x_1} + a_{z_1z_1z_1x_1} = 0, \\ a_{x_1x_1x_1y_1} + a_{y_1y_1y_1x_1} + a_{z_1z_1x_1y_1} = 0; \end{cases}$$

d'où résulte, observe M. Haugthon (p. 163) qu'on peut toujours, par un choix convenable d'axes coordonnés rectangulaires, diminuer de *trois* le nombre des coefficients dont dépendent les propriétés élastiques d'un corps dans le cas le plus général de contexture, c'est-à-dire les réduire à 18 si l'on en admet 21, ou à 12 si l'on n'en admet que 15 inégaux (n° **2**).

M. Rankine en conclut aussi qu'en tout point d'un corps il existe toujours trois plans rectangulaires sur lesquels il n'y a que des pressions normales, sans composante tangentielle, engendrées par une dilatation

$$\delta$$

supposée égale dans les trois sens x_1, y_1, z_1 normaux à ces plans (et par conséquent aussi égale en tous sens s'il n'y a pas de glissements $g_{y_1z_1}$, $g_{z_1x_1}$, $g_{x_1y_1}$, car alors pour tout sens x la dilatation est $\delta_x = \delta . c^2_{x_1x} + \delta . c^2_{y_1x} + \delta . c^2_{z_1x} = \delta$). En effet, toute composante tangentielle due à cette dilatation δ

$$p_{y_1z_1} = a_{y_1z_1x_1x_1}\delta + a_{y_1z_1y_1y_1}\delta + a_{y_1z_1z_1z_1}\delta$$

est nulle, ainsi que $p_{z_1x_1}$, $p_{x_1y_1}$, si les directions x_1, y_1, z_1 sont choisies de manière à satisfaire aux équations (46) [*].

---

[*] M. Rankine appelle *orthotatiques* les trois directions x_1, y_1, z_1 ainsi définies, et *orthotatiquement isotrope* un corps élastique dans lequel, pour toutes les directions rec-

12. *Cas de trois plans de symétrie de contexture.* — Revenons à la surface du quatrième degré (40) et à l'expression (39) de l'élasticité directe.

---

tangulaires x_1, y_1, z_1 possibles, les trois équations (46) seraient satisfaites. Alors l'ellipsoïde (45) se réduit à une sphère, ou la somme (42) $S_{x'}$ *est égale en tout sens;* car l'équation (46), $o = a_{x'x'y'z'} + a_{y'y'y'z'} + a_{z'z'y'z'} = (a_{x'x'} + a_{y'y'} + a_{z'z'})\, a_{y'z'}$ pour tous les systèmes x', y', z', revient, vu l'égalité (43) et la formule (33), à

$$o = (a_{xx} + a_{yy} + a_{zz}).(a_x c_{xy'} + a_y c_{yy'} + a_z c_{zy'})(a_x c_{xz'} + a_y c_{yz'} + a_z c_{zz'}).$$

Effectuant la multiplication des deux derniers facteurs, multipliant ensuite par le premier et effaçant comme nuls les trinômes de la forme (46), puis désignant analogiquement par S_x, S_y, S_z les trois premiers coefficients trinômes de l'équation (45), il reste

$$o = c_{xy'} c_{xz'} S_x + c_{yy'} c_{yz'} S_y + c_{zy'} c_{zz'} S_z = (S_y - S_x)\, c_{yy'} c_{yz'} + (S_z - S_x)\, c_{zy'} c_{zz'}.$$

Or cette équation ne peut être satisfaite quels que soient $c_{yy'}$ et $c_{zz'}$, que par

$$S_x = S_y = S_z;$$

par conséquent l'équation (45) de la surface se réduit à $1 = (x^2 + y^2 + z^2)\, S_x$; et $S_{x'}$ est égal en tout sens.

Mais M. Rankine observe très-bien qu'en remplissant toutes ces conditions le corps n'est pas pour cela *isotrope* complétement (*pantatically*) ou dans le sens que nous attachons à ce mot avec Cauchy.

Il construit aussi une surface qu'il appelle *hétérotatique*, donnant les valeurs de la différence

$$a_{y'y'z'z'} - a_{y'z'y'z'} = D$$

qu'il croit pouvoir exister entre une *élasticité latérale*

$$a_{y'y'z'z'}$$

et l'ÉLASTICITÉ TANGENTIELLE OU DE RIGIDITÉ

$$a_{y'z'y'z'}$$

de mêmes indices. On a pour cette différence, s'il y en a une,

$$D = (a_x c_{xy'} + a_y c_{yy'} + a_z c_{zy'})^2 (a_x c_{xz'} + a_y c_{yz'} + a_z c_{zz'})^2 - \\ - [(a_x c_{xy'} + a_y c_{yy'} + a_z c_{zy'})(a_x c_{xz'} + a_y c_{yz'} + a_z c_{zz'})]^2.$$

Si l'on développe, il y a évidemment disparition des termes en $a_{xxxx}, \ldots, a_{xxxy}$, et

Si la contexture du corps est mécaniquement symétrique par rapport au plan yz, c'est-à-dire si tous les coefficients d'élasticité restent

---

autres où tout intervertissement des sous-lettres est permis dans toute hypothèse (n° 2); et si l'on a égard aux relations connues

$$c_{yy'}c_{zz'} - c_{yz'}c_{zy'} = c_{xx'}, \quad c_{zy'}c_{xz'} - c_{zz'}c_{xy'} = c_{yx'}, \quad c_{xy'}c_{yz'} - c_{xz'}c_{yy'} = c_{zx'},$$

on obtient

$$\begin{aligned} D = {} & (a_{yyzz} - a_{yzyz})\, c^2_{xx'} + (a_{zzxx} - a_{zxzx})\, c^2_{yx'} + (a_{xxyy} - a_{xyxy})\, c^2_{zx'} + \\ & + 2\,(a_{xxyz} - a_{zxxy})\, c_{yx'}c_{zx'} + 2\,(a_{yyzx} - a_{xyyz})\, c_{zx'}c_{xx'} + 2\,(a_{xxyz} - a_{yzzx})\, c_{xx'}c_{yx'} \end{aligned}$$

qui donne un *ellipsoïde* pour cette surface dont les rayons vecteurs dans les diverses directions x' ont des longueurs $\frac{1}{\sqrt{D}}$.

Mais on a en tout sens $D = 0$, et cette surface n'existe pas, pour ceux qui ne se refusent pas à admettre les six égalités complémentaires (8), ou qui attribuent aux divers coefficients les valeurs résultant du calcul des actions moléculaires.

M. Rankine étudie aussi, sous le nom de *métatatiques*, les directions rectangulaires y_1, z_1 telles qu'on ait

$$a_{y_1y_1y_1z_1} = a_{z_1z_1z_1y_1}.$$

Il en existe, sur tout plan, deux paires dont chacune coupe l'autre à 45 degrés; car si y', z' sont deux directions rectangulaires tracées sur ce plan, comme on a

$$a_{y_1} = a_{y'}\cos(y', y_1) + a_{z'}\sin(y', y_1), \quad a_{z_1} = -a_{y'}\sin(y', y_1) + a_{z'}\cos(y', y_1),$$

l'on trouve facilement

$$\begin{aligned} (47) \quad a_{y_1y_1y_1z_1} - a_{z_1z_1z_1y_1} = {} & \frac{1}{4}(4a_{y'y'z'y'z'} + 2a_{y'y'y'z'z'} - a_{y'y'y'y'} - a_{z'z'z'z'z'})\sin 4(y', y_1) + \\ & + (a_{y'y'y'z'} - a_{z'z'z'y'})\cos 4(y', y_1); \end{aligned}$$

d'où, si le premier membre est posé nul, on tire pour l'angle (y', y'_1) *huit* valeurs différant consécutivement de $\frac{\pi}{4}$.

Il nomme axes métatatiques *principaux* ceux dont les directions x', y', z' sont telles qu'on ait à la fois

$$a_{y'y'y'z'} = a_{z'z'z'y'}, \quad a_{z'z'z'x'} = a_{x'x'x'z'}, \quad a_{x'x'x'y'} = a_{y'y'y'x'}.$$

Comme on peut remplir cette condition en tout point d'un corps, il y existe, par cela seul, six autres pareils axes d'après ce qu'on vient de voir, ce qui fait neuf en tout.

les mêmes quand on prend x' directement opposé à x, en laissant y et z dans leurs directions, comme on a, alors,

$$c_{xx'} = -1, \quad c_{yy'} = 1, \quad c_{zz'} = 1 \quad \text{et tous les autres cosinus nuls.}$$

d'où

$$a_{x'} = -a_x, \quad a_{y'} = a_y, \quad a_{z'} = a_z,$$

les coefficients a_{yyzx}, a_{xyyz}, a_{zzxy}, a_{yzzx}, a_{zzzx}, a_{xxxz}, a_{xxxy}, a_{yyyx}, qui ont x comme sous-lettre une ou trois fois, doivent être nuls d'après la formule (33).

S'il y a aussi symétrie par rapport au plan zx, a_{xxyz}, a_{zxxy}, a_{yyyz}, a_{zzzy} doivent également s'annuler, en sorte que les douze coefficients des deux dernières lignes de l'expression (39) ou de l'équation (40) (coefficients que M. Rankine appelle *de tension oblique*, ou *élasticités asymétriques*) disparaissent, et alors la symétrie existe aussi par rapport au troisième plan coordonné.

Faisons donc, pour abréger,

$$(48)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{x'x'x'x'} = A, \\ a_{xxxx} = a, \quad a_{yyyy} = b, \quad a_{zzzz} = c, \\ a_{yzyz} = d, \quad a_{zxzx} = e, \quad a_{xyxy} = f, \quad a_{yyzz} = d', \quad a_{zzxx} = e', \quad a_{xxyy} = f'; \end{array}\right.$$

les équations (39) et (40) se réduisent à

$$(49)\quad A = ac_x^4 + bc_y^4 + cc_z^4 + 2(2d + d')c_y^2 c_z^2 + 2(2e + e')c_z^2 c_x^2 + 2(2f + f')c_x^2 c_y^2,$$

$$(50)\quad 1 = ax^4 + by^4 + cz^4 + 2(2d + d')y^2 z^2 + 2(2e + e')z^2 x^2 + 2(2f + f')x^2 y^2.$$

Enfin il appelle *métatatiquement isotrope* un solide où les lignes de toutes les directions jouissent de cette propriété-là, ce qui entraîne aussi, pour toutes les directions rectangulaires possibles y', z', la nullité de ce qu'il appelle la différence métatatique [la première parenthèse du second membre de (47)]; ou ce qui entraîne la relation

$$(47\ bis)\qquad a_{y'y'z'z'} + 2a_{y'z'y'z'} = \frac{a_{y'y'y'y'} + a_{z'z'z'z'}}{2}.$$

Mais (de même qu'on vient de voir pour les directions *orthotatiques*) ce corps est loin d'être isotrope complétement on *pantatiquement*, comme dit le même savant, auquel on doit un grand nombre d'autres remarques, dont celles qui se rapportent à des coordonnées et *contraordonnées* obliques ne sont pas les moins curieuses, et sont employées ingénieusement par lui à l'explication des diverses formes de cristaux.

Les équations (41) propres à fournir les directions et les grandeurs des demi-diamètres normaux à la surface (50), ou les maxima et minima de la valeur (49) de A, sont

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{[ac_x^2+(2f+f')c_y^2+(2e+e')c_z^2]c_x}{c_x}=\frac{[(2f+f')c_x^2+bc_y^2+(2d+d')c_z^2]c_y}{c_y}= \\ &=\frac{[(2e+e')c_x^2+(2d+d')c_y^2+cc_z^2]c_z}{c_z}=A. \end{aligned}\right.$$

Elles donnent pour les cosinus ou leurs rapports, et pour A, les *treize* systèmes suivants de valeurs

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} &c_y=0,\quad c_z=0,\quad c_x^2=1,\quad A=a, \\ &c_z=0,\quad c_x=0,\quad c_y^2=1,\quad A=b, \\ &c_x=0,\quad c_y=0,\quad c_z^2=1,\quad A=c; \end{aligned}\right.$$

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} &c_x=0,\ \frac{c_z}{c_y}=\pm\sqrt{\frac{b-(2d+d')}{c-(2d+d')}},\quad A=\frac{bc-(2d+d')^2}{b+c-2(2d+d')}, \\ &c_y=0,\ \text{avec des valeurs analogues de}\quad c_x:c_z\ \text{et de A}, \\ &c_z=0,\ \text{avec des valeurs analogues de}\quad c_y:c_x\ \text{et de A}; \end{aligned}\right.$$

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} &\text{Enfin, ce qui résulte des trois parenthèses carrées de (51) égalées entre elles, savoir:} \\ &c_x=\pm\sqrt{\frac{N_x}{N_x+N_y+N_z}},\ c_y=\pm\sqrt{\frac{N_y}{N_x+N_y+N_z}},\ c_z=\pm\sqrt{\frac{N_z}{N_x+N_y+N_z}}, \\ &\text{si}\ N_x=(b-2f-f')(c-2e-e')+(2f+f'-2d-d')(2d+d'-2e-e'), \\ &N_y=(c-2d-d')(a-2f-f')+(2d+d'-2e-e')(2e+e'-2f-f'), \\ &N_z=(a-2e-e')(b-2d-d')+(2e+e'-2f-f')(2f+f'-2d-d'), \\ &\text{et}\ A=\frac{abc-a(2d+d')^2-b(2e+e')^2-c(2f+f')^2+2(2d+d')(2e+e')(2f+f')}{N_x+N_y+N_z}. \end{aligned}\right.$$

Les trois systèmes (52) donnent pour maxima et minima les élasticités suivant les directions des axes x, y, z.

Les systèmes (53) donnent six autres maxima ou minima, suivant des directions de lignes tracées deux à deux et symétriquement dans les six paires d'angles plans des axes y et z, z et x, x et y.

Enfin les systèmes (54) donnent quatre maxima ou minima, tous égaux en grandeur, et dirigés symétriquement dans l'intérieur des quatre paires d'angles trièdres opposés formés par les trois plans coordonnés.

Les trois solutions (52) $A = a_{xxxx}$, a_{yyyy}, a_{zzzz} existent toujours.

Les six solutions (53) dirigées dans les angles plans yz, zx, xy n'existent point, vu l'imaginarité des rapports des cosinus, lorsque

$$(55)\qquad \begin{cases} 2d + d' \text{ est compris entre } b \text{ et } c, \\ 2e + e' \text{ est compris entre } c \text{ et } a, \\ 2f + f' \text{ est compris entre } a \text{ et } b; \end{cases}$$

et elles se confondent avec une ou plusieurs des solutions (52) a, b, c, quand un ou deux des binômes (55) atteignent une de leurs limites a, b, c. *Ce sont les conditions*, probablement toujours remplies dans la nature, *pour que les élasticités directes* $A = a_{x'x'x'x'}$ *varient graduellement* dans les trois plans principaux, c'est-à-dire ne croissent pas d'abord pour décroître ensuite, ou réciproquement, en allant de l'une à l'autre de leurs valeurs principales b et c, c et a, a et b.

Alors, pour que les maxima et minima (54), de l'intérieur des angles trièdres, n'existent pas non plus, il faut, ou qu'une ou plusieurs des quantités N_x, N_y, N_z s'annulent, car alors ces maxima ou minima se confondent avec a ou b ou c; ou qu'une des trois mêmes quantités N_x, N_y, N_z ait un signe différent de ceux des deux autres, en sorte qu'un au moins des deux rapports $\frac{c_y}{c_x} = \sqrt{\frac{N_y}{N_x}}$, $\frac{c_y}{c_z} = \sqrt{\frac{N_y}{N_z}}$ soit imaginaire. C'est bien ce qui a lieu, par exemple, si, les conditions (55) étant remplies, et les coefficients a, b, c étant supposés rangés par ordre de grandeur en sorte que

$$a > b > c,$$

$2e + e'$ est ou plus petit que $2d + d'$ ou plus grand que $2f + f'$, car il résulte de $a > 2f + f' > b > 2d + d' > c$ et de $a > 2e + e' > c$ que N_x a ses deux termes positifs quand $2e + e' < 2d + d'$, et N_z les a quand $2e + e' > 2f + f'$, tandis que, dans l'un comme dans l'autre cas, N_y a ses deux termes négatifs.

Mais une pareille relation de grandeur, qui ferait tomber $2e + e'$ hors de l'intervalle de $2d + d'$ à $2f + f'$, est bizarre et ne saurait guère être non plus dans la nature, car lorsque, les conditions (55) étant remplies, l'on a $a > b > c$, on a probablement aussi

$$2d + d' < 2e + e' < f' + f'.$$

Or on peut très-bien encore, avec cette dernière relation, avoir N_x, N_y, N_z *de signes non semblables;* mais les conditions de cette différence de signe entre l'une et les deux autres de ces trois quantités ne peuvent pas être exprimées d'une manière générale; et il faudra, dans chaque cas, s'assurer *numériquement* qu'elles sont remplies, si l'on veut être certain que les nombres adoptés pour les six coefficients a, b, c, $d = d'$, $e = e'$, $f = f'$, que l'expérience ne pourra que rarement fournir tous, donnent aux élasticités une loi simple et naturelle de variation dans les divers sens.

13. *Distribution ellipsoïdale des élasticités.* — Si l'on fait, dans les formules du numéro précédent,

$$(56) \qquad \text{soit } 2d + d' = \frac{b+c}{2}, \quad 2e + e' = \frac{c+a}{2}, \quad 2f + f' = \frac{a+b}{2},$$

$$(57) \qquad \text{soit } 2d + d' = \sqrt{bc}, \quad 2e + e' = \sqrt{ca}, \quad 2f + f' = \sqrt{ab},$$

ce qui remplit bien les conditions (55), les valeurs (54) de N_x, N_y, N_z sont nulles, et les solutions (54), donnant des maxima et minima dans les angles trièdres, rentrent dans les solutions (52) donnant celles qui sont dirigées suivant les côtés x, y, z de ces angles, en sorte que celles-ci, c'est-à-dire

$$a, \quad b, \quad c,$$

donnent alors les seuls maxima et minima absolus ou *relatifs* de l'élasticité directe A ou $a_{x'x'x'x'}$.

Quand on a les moyennes arithmétiques, ou les relations (56), la valeur (49) de l'élasticité directe dans un sens quelconque (c_x, c_y, c_z) se réduit, vu $c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = 1$, à

$$A = ac_x^2 + bc_y^2 + cc_z^2,$$

et l'équation (50) de la surface, à

$$1 = (x^2 + y^2 + z^2)(\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}y^2 + \mathrm{c}z^2).$$

Cette surface dont les rayons vecteurs sont les inverses $\frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{A}}}$ des racines quatrièmes des élasticités, est toujours du quatrième degré; mais on voit qu'il y en a une autre, dont les rayons vecteurs sont les inverses $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}}$ des simples racines carrées; c'est l'ellipsoïde

$$(58) \qquad 1 = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}y^2 + \mathrm{c}z^2.$$

Quand on a les moyennes géométriques, ou les relations (57), les seconds membres de (49) et de (50) deviennent des carrés parfaits, non plus symboliquement mais réellement, et ces deux équations se réduisent, en extrayant les racines, à

$$(59) \qquad \sqrt{\mathrm{A}} = \mathrm{c}_x^2\sqrt{\mathrm{a}} + \mathrm{c}_y^2\sqrt{\mathrm{b}} + \mathrm{c}_z^2\sqrt{\mathrm{c}},$$

$$(60) \qquad 1 = x^2\sqrt{\mathrm{a}} + y^2\sqrt{\mathrm{b}} + z^2\sqrt{\mathrm{c}}.$$

La surface dont les rayons vecteurs sont les $\frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{A}}}$ se réduit à un ellipsoïde.

Un pareil mode de distribution des élasticités exige, dans le solide, l'existence des trois plans de symétrie de contexture, rectangulaires entre eux, que nous avons supposés au numéro précédent; car comme, en prenant pour axes coordonnés x, y, z les axes de figure d'un ellipsoïde, il n'y a dans son équation que les termes en x^2, y^2, z^2, l'équation du quatrième degré (40) n'aura, pour les mêmes axes, que les termes en x^4, y^4, z^4, y^2z^2, z^2x^2, x^2y^2, en sorte que les *six* coefficients a_{yyyz}, a_{zzzy}, . . , a_{yyyx} de la dernière ligne de cette équation (40) seront nuls pour ces axes, ainsi que les trois sommes telles que $\mathrm{a}_{xxyz} + 2\,\mathrm{a}_{zxxy}$ de l'avant-dernière ligne, ce qui entraîne aussi la nullité des six coefficients qui composent ces sommes, si l'on admet que a_{xxyz} et a_{zxxy} sont ou égaux ou seulement de même signe, et ainsi des deux autres couples. Or cette nullité des douze *élasticités asymétriques* caractérise (numéro précédent) l'existence des trois plans de symétrie.

Observons que l'expression (49) $\mathrm{a}_{x'x'x'x'} = \mathrm{a}\mathrm{c}_{xx'}^4 + \ldots$ met en lumière

la condition connue pour que la contexture soit égale en tout sens autour d'un axe, celui des x par exemple, car cette égalité exige non-seulement $b = c$, $e = f$, $e' = f'$, mais encore $a_{x'x'x'x'} = b = c$ pour toutes directions de x' perpendiculaires à x, ou que l'on ait

$$b = b(c_{yx'}^4 + c_{zx'}^4) + 2(2d + d')c_{yx'}^2 c_{zx'}^2 = b(1 - 2c_{yx'}^2 c_{zx'}^2) + (2d + d').2c_{yx'}^2 c_{zx'}^2$$

pour toute valeur de $c_{yx'}^2$; d'où l'on tire cette condition

$$(61) \qquad b = c = 2d + d'.$$

Et l'isotropie exige

$$(62) \quad a = b = c = 2d + d' = 2e + e' = 2f + f'; \quad d = e = f, \quad d' = e' = f'.$$

14. *Forme intégrable que prennent les équations d'équilibre quand les élasticités directes se distribuent ellipsoïdalement par moyennes géométriques.* — Supposons remplies les deuxièmes conditions du n° **13**, c'est-à-dire supposons qu'on ait (57) $2d + d' = \sqrt{bc}$, etc.; et, vu la controverse (n° **2**) au sujet des égalités $d = d'$, $e = e'$, $f = f'$ que démontre le calcul des actions moléculaires, laissons inégaux ces coefficients, mais en supposant entre eux un rapport constant pour une même matière; ou posons

$$(63) \qquad \frac{d'}{d} = \frac{e'}{e} = \frac{f'}{f} = i.$$

Alors, si nous faisons, pour abréger,

$$\frac{a}{2+i} = a^2, \quad \frac{b}{2+i} = b^2, \quad \frac{c}{2+i} = c^2,$$

les neuf coefficients auront les expressions suivantes :

$$(64) \quad \begin{cases} a = (2+i)a^2, \quad b = (2+i)b^2, \quad c = (2+i)c^2, \\ d = bc, \quad e = ca, \quad f = ab, \quad d' = ibc, \quad e' = ica, \quad f' = iab. \end{cases}$$

Les composantes de pression, pour de petits déplacements u, v, w, et pour le cas ordinaire où il n'y a pas lieu de tenir compte des pressions

antérieures aux déplacements, peuvent être écrites

$$(65)\quad \begin{cases} p_{xx} = a\left[(2+i)a\dfrac{du}{dx} + ib\dfrac{dv}{dy} + ic\dfrac{dw}{dz}\right], & p_{yz} = bc\left(\dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy}\right), \\ p_{yy} = b\left[ia\dfrac{du}{dx} + (2+i)b\dfrac{dv}{dy} + ic\dfrac{dw}{dz}\right], & p_{zx} = ca\left(\dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}\right), \\ p_{zz} = c\left[ia\dfrac{du}{dx} + ib\dfrac{dv}{dy} + (2+i)c\dfrac{dw}{dz}\right], & p_{xy} = ab\left(\dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}\right) [*]. \end{cases}$$

Substituant dans les équations générales indéfinies d'équilibre d'un élément parallélipipède (18),

$$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{yx}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} = 0, \quad \frac{dp_{xy}}{dx} + \cdots = 0, \quad \frac{dp_{xz}}{dx} + \cdots = 0,$$

nous avons

$$(66)\quad \begin{cases} a\left[a\dfrac{d^2u}{dx^2} + b\dfrac{d^2u}{dy^2} + c\dfrac{d^2u}{dz^2} + (1+i)\dfrac{d}{dx}\left(a\dfrac{du}{dx} + b\dfrac{dv}{dy} + c\dfrac{dw}{dz}\right)\right] = 0, \\ b\left[a\dfrac{d^2v}{dx^2} + b\dfrac{d^2v}{dy^2} + c\dfrac{d^2v}{dz^2} + (1+i)\dfrac{d}{dy}\left(a\dfrac{du}{dx} + b\dfrac{dv}{dy} + c\dfrac{dw}{dz}\right)\right] = 0, \\ c\left[a\dfrac{d^2w}{dx^2} + b\dfrac{d^2w}{dy^2} + c\dfrac{d^2w}{dz^2} + (1+i)\dfrac{d}{dz}\left(a\dfrac{du}{dx} + b\dfrac{dv}{dy} + c\dfrac{dw}{dz}\right)\right] = 0 \end{cases}$$

Or si nous faisons

$$(67)\qquad a\frac{du}{dx} + b\frac{dv}{dy} + c\frac{dw}{dz} = \theta$$

(qui, lorsqu'on a $a = b = c$, n'est autre chose que la *dilatation cubique* multipliée par a), et si nous ajoutons ces équations (66) différentiées respectivement par rapport à x, à y, à z, nous obtenons simplement

$$(68)\qquad a\frac{d^2\theta}{dx^2} + b\frac{d^2\theta}{dy^2} + c\frac{d^2\theta}{dz^2} = 0,$$

---

[*] Il est facile de voir que ces valeurs donnent un potentiel (6) ou (7) de la forme

$$\Phi^1 = \frac{1+i}{2(2+3i)}\left(\frac{p_{xx}}{a} + \frac{p_{yy}}{b} + \frac{p_{zz}}{c}\right)^2 + \frac{p_{yz}^2 - p_{yy}p_{zz}}{2bc} + \frac{p_{zx}^2 - p_{zz}p_{xx}}{2ca} + \frac{p_{xy}^2 - p_{xx}p_{yy}}{2ab};$$

expression identique avec la moitié de celle de M. Clapeyron [7e leçon de M. Lamé, expression (4)] lorsqu'on fait $a^2 = b^2 = c^2 = \mu$. Le potentiel mécanique intérieur, ou le travail de déformation qu'il considère, s'exprime donc aussi simplement quand la distribution est ellipsoïdale que quand elle est sphérique ou isotrope.

équation intégrable sous forme finie. En effet,

f désignant une fonction arbitraire,

α, β, γ des variables auxiliaires,

cette équation (68) est satisfaite par

$$(69)\qquad \theta = \iiint \frac{f(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{\sqrt{\frac{(x-\alpha)^2}{a} + \frac{(y-\beta)^2}{b} + \frac{(z-\gamma)^2}{c}}},$$

puisqu'il en résulte

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \iiint f(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \left[-\frac{1}{a(\sqrt{\ })^3} + 3\frac{(x-\alpha)^2}{a^2(\sqrt{\ })^5} \right];$$

$\frac{d^2\theta}{dy^2}$ et $\frac{d^2\theta}{dz^2}$ = des expressions semblables en b et $(y-\beta)^2$ ou c et $(z-\gamma)^2$ au lieu de a et de $(x-\alpha)^2$.

D'autres équations, aussi facilement intégrables, peuvent être obtenues dans ce cas, comme dans celui d'isotropie; car comme on a identiquement

$$a\frac{d^2u}{dx^2} + b\frac{d^2u}{dy^2} + c\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d\theta}{dx} + c\frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right) - b\frac{d}{dy}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right),$$

$$a\frac{d^2v}{dx^2} + b\frac{d^2v}{dy^2} + c\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d\theta}{dy} + a\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right) - c\frac{d}{dz}\left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\right),$$

$$a\frac{d^2w}{dx^2} + b\frac{d^2w}{dy^2} + c\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{d\theta}{dz} + b\frac{d}{dy}\left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\right) - a\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right),$$

si l'on représente par

$$\iota_x, \quad \iota_y, \quad \iota_z$$

les trois *rotations moyennes* autour des axes des x, des y, des z, que les déplacements impriment au corps autour du point (x, y, z), c'est-

à-dire si l'on fait

$$(70)\quad \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}\right)=\iota_x,\quad \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}\right)=\iota_y,\quad \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}\right)=\iota_z\ [*],$$

les trois équations différentielles (66) peuvent s'écrire

$$(71)\quad \begin{cases} c\dfrac{d\iota_y}{dz}-b\dfrac{d\iota_z}{dy}+\dfrac{2+i}{2}\dfrac{d\theta}{dx}=0,\\ a\dfrac{d\iota_z}{dx}-c\dfrac{d\iota_x}{dz}+\dfrac{2+i}{2}\dfrac{d\theta}{dy}=0,\\ b\dfrac{d\iota_x}{dy}-a\dfrac{d\iota_y}{dx}+\dfrac{2+i}{2}\dfrac{d\theta}{dz}=0. \end{cases}$$

Retranchant ces équations deux à deux l'une de l'autre après les avoir

---

[*] Ces expressions, qui ont été trouvées par M. Cauchy (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II, 1841, p. 321, form. 10), se démontrent facilement en remarquant que si p est la longueur et α est l'angle avec le plan xy d'une perpendiculaire mP abaissée par un point m du corps sur la ligne Mx menée parallèlement aux x par un autre point M(x, y, z), les excès v' et w' des déplacements v et w du point m sur ceux du pied P de la perpendiculaire p sont :

$$\begin{cases} \text{parallèlement aux } y\ldots\ldots & v'=\dfrac{dv}{dy}p\cos\alpha+\dfrac{dv}{dz}p\sin\alpha,\\ \text{parallèlement aux } z\ldots\ldots & w'=\dfrac{dw}{dy}p\cos\alpha+\dfrac{dw}{dz}p\sin\alpha. \end{cases}$$

La rotation de m, et par conséquent du plan mPM autour de Mx, est donc

$$\frac{w'\cos\alpha-v'\sin\alpha}{p}=\frac{dw}{dy}\cos^2\alpha-\frac{dv}{dz}\sin^2\alpha+\left(\frac{dw}{dz}-\frac{dv}{dy}\right)\sin\alpha\cos\alpha.$$

La rotation d'un autre plan passant aussi par Mx et à angle droit sur Pm s'obtiendra en changeant α en $\frac{\pi}{2}+\alpha$. La demi-somme de ces rotations de deux plans perpendiculaires est

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}\right).$$

Comme elle est indépendante de l'angle α, elle donne bien la rotation moyenne, autour de Mx, de toute la petite portion du corps qui environne le point M.

différentiées par rapport à x, y ou z choisis de manière que la soustraction fasse disparaître les termes en θ, et ayant égard à l'égalité identique

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} + \frac{dv_z}{dz} = 0,$$

l'on obtient les équations

$$(72)\quad \begin{cases} a\dfrac{d^2v_x}{dx^2} + b\dfrac{d^2v_x}{dy^2} + c\dfrac{d^2v_x}{dz^2} = 0, \\ a\dfrac{d^2v_y}{dx^2} + b\dfrac{d^2v_y}{dy^2} + c\dfrac{d^2v_y}{dz^2} = 0, \\ a\dfrac{d^2v_z}{dx^2} + b\dfrac{d^2v_z}{dy^2} + c\dfrac{d^2v_z}{dz^2} = 0, \end{cases}$$

dont chacune est satisfaite par une expression comme (69).

Enfin, si l'on différentie successivement deux fois par rapport à x, deux fois par rapport à y, deux fois par rapport à z, la première des équations (66), et si l'on ajoute les résultats multipliés respectivement par a, b, c, on peut effacer ce qui vient de la partie

$$(1+i)\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx} + b\frac{dv}{dy} + c\frac{dw}{dz}\right) = (1+i)\frac{d\theta}{dx}$$

puisque l'équation (68) donne

$$\frac{d}{dx}\left(a\frac{d^2\theta}{dx^2} + b\frac{d^2\theta}{dy^2} + c\frac{d^2\theta}{dz^2}\right) = 0.$$

Il reste

$$(73)\quad \begin{cases} a\dfrac{d^2}{dx^2}\left(a\dfrac{d^2u}{dx^2} + b\dfrac{d^2u}{dy^2} + c\dfrac{d^2u}{dz^2}\right) + b\dfrac{d^2}{dy^2}(\text{même trinôme}) + c\dfrac{d^2}{dz^2}(\text{même trinôme}) = 0, \\ \text{et l'on a deux équations semblables avec } v \text{ et } w \text{ au lieu de } u. \end{cases}$$

Elles sont satisfaites, f étant une autre fonction arbitraire que f, par

$$(74)\quad \begin{cases} u = \displaystyle\iiint \mathrm{f}(\alpha, \beta, \gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\sqrt{\frac{(x-\alpha)^2}{a} + \frac{(y-\beta)^2}{b} + \frac{(z-\gamma)^2}{c}}, \\ v \text{ et } w = \text{des expressions semblables avec d'autres fonctions au lieu de f,} \end{cases}$$

car il en résulte

$$a\frac{d^2u}{dx^2}+b\frac{d^2u}{dy^2}+c\frac{d^2u}{dz^2}=2\int\int\int\frac{f(\alpha,\beta,\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma}{\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}},$$

expression dont nous avons vu que les trois dérivées secondes $\frac{d^2}{dx^2}$, $\frac{d^2}{dy^2}$, $\frac{d^2}{dz^2}$, ajoutées ensemble après avoir été multipliées par a, b, c, donnent une somme nulle.

On voit donc que les intégrales par fonctions dites potentielles, qu'on trouve à la sixième leçon sur l'élasticité de M. Lamé (§ 27, p. 70) pour le cas rare de l'isotropie parfaite, s'appliquent facilement, avec une légère modification, à ce genre de contexture hétérotrope, qui paraît appartenir au plus grand nombre des corps, comme on va voir au n° **16**.

15. *Condition pour que les équations de l'équilibre intérieur d'un solide prennent la forme ainsi intégrable.* — Réciproquement, il est facile de voir que ce n'est qu'autant que les neuf coefficients a du cas de trois plans de symétrie ont entre eux les relations exprimées par les équations

$$(57)\qquad 2d+d'=\sqrt{bc},\ \text{etc.},\qquad \text{et}\qquad (63)\quad \frac{d'}{d}=\frac{e'}{e}=\frac{f'}{f},$$

que les équations différentielles de l'équilibre peuvent en fournir une de la forme intégrable (68)

$$a\frac{d^2\theta}{dx^2}+b\frac{d^2\theta}{dy^2}+c\frac{d^2\theta}{dz^2}=0,\quad \theta\ \text{étant de la forme}\quad (67)\ a\frac{du}{dx}+b\frac{dv}{dy}+c\frac{dw}{dz}.$$

En effet, ces équations différentielles, en laissant a, b, c, d, e, f, d′, e′, f′ quelconques, sont

$$(75)\quad\left\{\begin{aligned}
&a\frac{d^2u}{dx^2}+f\frac{d^2u}{dy^2}+e\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{d}{dx}\left[(f+f')\frac{dv}{dy}+(e+e')\frac{dw}{dz}\right]=0,\\
&f\frac{d^2v}{dx^2}+b\frac{d^2v}{dy^2}+d\frac{d^2v}{dz^2}+\frac{d}{dy}\left[(d+d')\frac{dw}{dz}+(f+f')\frac{du}{dx}\right]=0,\\
&e\frac{d^2w}{dx^2}+d\frac{d^2w}{dy^2}+c\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{d}{dz}\left[(e+e')\frac{du}{dy}+(d+d')\frac{dv}{dx}\right]=0.
\end{aligned}\right.$$

Partageons les coefficients a de $\frac{d^2u}{dx^2}$ dans la première, b de $\frac{d^2v}{dy^2}$ dans la deuxième, et c de $\frac{d^2w}{dz^2}$ dans la troisième, de manière que les parties entre crochets, soumises aux $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$ soient réductibles à un même trinôme affecté seulement de facteurs différents; ces équations se trouveront écrites

$$(76)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left[a-\frac{(e+e')(f+f')}{d+d'}\right]\frac{d^2u}{dx^2}+f\frac{d^2u}{dy^2}+e\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{d}{dx}\left[\frac{(e+e')(f+f')}{d+d'}\frac{du}{dx}+(f+f')\frac{dv}{dy}+(e+e')\frac{dw}{dz}\right]=0,\\
&f\frac{d^2v}{dx^2}+\left[b-\frac{(f+f')(d+d')}{e+e'}\right]\frac{d^2v}{dy^2}+d\frac{d^2v}{dz^2}+\frac{d}{dy}\left[(f+f')\frac{du}{dx}+\frac{(f+f')(d+d')}{e+e'}\frac{dv}{dy}+(d+d')\frac{dw}{dz}\right]=0,\\
&e\frac{d^2w}{dx^2}+d\frac{d^2w}{dy^2}+\left[c-\frac{(d+d')(e+e')}{f+f'}\right]\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{d}{dz}\left[(e+e')\frac{du}{dx}+(d+d')\frac{dv}{dy}+\frac{(d+d')(e+e')}{f+f'}\frac{dw}{dz}\right]=0.
\end{aligned}\right.$$

Or, pour qu'on obtienne, en ajoutant ensemble ces équations, différentiées respectivement par rapport à x, à y, à z, une équation de la forme (68), il faut que les premières parties de (76) ensemble donnent la même fonction du premier degré des dérivées du second ordre d'un certain trinôme, que les deuxièmes parties, ce qui exige que les coefficients les uns au-dessus des autres affectant, dans les premières parties, soit les $\frac{d^2}{dx^2}$, soit les $\frac{d^2}{dy^2}$, soit les $\frac{d^2}{dz^2}$ de u, v, w, aient entre eux les mêmes rapports que les coefficients affectant $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$ dans chaque crochet, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{d}{d+d'}=\frac{e}{e+e'}=\frac{f}{f+f'}=\frac{a(d+d')}{(e+e')(f+f')}-1=\frac{b(e+e')}{(f+f')(d+d')}-1=\frac{c(f+f')}{(d+d')(e+e')}-1.$$

La comparaison des trois premiers membres de cette égalité multiple donne les relations (63).

Et si l'on compare successivement le premier membre avec les deux derniers, on tire

$$b=\frac{f+f'}{e+e'}(2d+d'),\quad c=\frac{e+e'}{f+f'}(2d+d'),$$

qui multipliées ensemble donnent la première des relations suivantes

dont les deux autres s'obtiennent de même :

$$(2d + d')^2 = bc, \quad (2e + e')^2 = ca, \quad (2f + f')^2 = ab,$$

c'est-à-dire précisément les relations (57).

Les relations (57) et (63) sont donc nécessaires pour obtenir des intégrales des formes données au numéro précédent.

16. *Ce mode de distribution des élasticités doit avoir lieu dans les solides amorphes ou à cristallisation confuse, au moins dans certaines limites d'hétérotropie. Calcul des coefficients d'élasticité d'un corps primitivement isotrope, comprimé ou écroui inégalement en divers sens.* — Mais la distribution ellipsoïdale des $\frac{1}{\sqrt[4]{A}}$, due aux relations par moyennes géométriques (57),

$$2d + d' = \sqrt{bc}, \quad 2e + e' = \sqrt{ca}, \quad 2f + f' = \sqrt{ab},$$

dont nous venons de reconnaître les propriétés analytiques, doit à un autre titre attirer plus particulièrement notre attention. En effet, dans les corps à cristallisation confuse tels que les métaux, etc., employés dans les constructions, où les molécules affectent indistinctement toutes les orientations, si les élasticités sont égales dans trois directions rectangulaires, elles doivent l'être en tous sens, car on ne voit aucune raison pour qu'elles soient plus grandes ou moindres dans les autres directions. Si les élasticités y sont inégales, cela ne peut tenir qu'à des rapprochements moléculaires plus grands dans certains sens que dans d'autres, par suite du forgeage, de l'étirage, du laminage, etc., ou des circonstances de la solidification. Calculons les grandeurs nouvelles que doivent prendre les coefficients d'élasticité dans un corps primitivement isotrope ainsi modifié.

Cauchy a démontré que, de quelque manière qu'un corps ait été dilaté et comprimé, il y a toujours, en chacun de ses points, trois directions *principales*, rectangulaires entre elles, suivant lesquelles les dilatations positives ou négatives ne sont accompagnées d'aucun glissement, en sorte que les trois côtés de chaque élément parallélipipède rectangle suivant ces directions sont restés orthogonaux [*]. Prenons ces direc-

[*] Cela résulte immédiatement, comme on sait, de ce que d'après la première for-

tions pour celles des x, y, z, et appelons

$$\partial, \quad \partial', \quad \partial''$$

les proportions des augmentations positives ou négatives des côtés de l'élément, parallèles à ces coordonnées.

Le calcul que nous entreprenons ne peut se faire sans attribuer un mode d'action aux forces moléculaires réciproques; admettons, comme aux notes des n°s 3 et 4, celui que leur ont attribué tous les géomètres qui ont fait des calculs analogues, et qui laisse arbitraire la loi de variation de ces forces avec les distances où elles agissent, en supposant seulement ces distances insensibles conformément à tous les faits. Nous aurons, comme à la première des notes citées, les expressions (12)

$$(77)\quad \begin{cases} a_{xxxx} \text{ ou } a_{yyyy} \text{ ou } a_{xyxy} = \frac{\rho}{2} \mathrm{S}\, m \mathrm{F}r.(\mathrm{x}^4 \text{ ou } \mathrm{y}^4 \text{ ou } \mathrm{x}^2\mathrm{y}^2), \\ \text{en faisant } \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{fr}{r} = \mathrm{F}r. \end{cases}$$

Or, en appelant

$$\rho_0, \quad r_0, \quad \mathrm{x}_0, \quad \mathrm{y}_0, \quad \mathrm{z}_0$$

---

mule (26) on a, pour la dilatation dans une direction quelconque r,

$$\partial_r = \partial_x c_{rx}^2 + \partial_y c_{ry}^2 + \partial_z c_{rz}^2 + g_{yz} c_{ry} c_{rz} + g_{zx} c_{rz} c_{rx} + g_{xy} c_{rx} c_{ry};$$

d'où, en faisant

$$c_{rx} = x\sqrt{\pm\partial_r}, \quad c_{ry} = y\sqrt{\pm\partial_r}, \quad c_{rz} = z\sqrt{\pm\partial_r},$$

l'équation

$$\partial_x x^2 + \partial_y y^2 + \partial_z z^2 + g_{yz} yz + g_{zx} zx + g_{xy} xy = \pm 1$$

pour la surface dont les rayons vecteurs sont les inverses $\frac{1}{\sqrt{\pm\partial_r}}$ des racines carrées des grandeurs, prises positivement, des dilatations positives ou négatives ∂_r dans leurs sens respectifs r; et de ce que, si l'on rapporte à ses axes de figure cette surface du second degré simple ou double (ellipsoïde quand les ∂_r sont ou toutes positives ou toutes négatives, et système de deux hyperboloïdes conjugués quand elles sont positives dans certaines directions et négatives dans d'autres), les termes en yz, zx, xy devront manquer, en sorte que, pour les trois directions rectangulaires de ces axes pris pour ceux des x, y, z, les g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} seront nuls.

les grandeurs de la densité, de la distance r et de ses projections sur les x, y, z avant que l'isotropie ait été altérée, nous avons

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0(1+\delta), \quad y = y_0(1+\delta'), \quad z = z_0(1+\delta''), \quad \rho = \dfrac{\rho_0}{(1+\delta)(1+\delta')(1+\delta'')} \\ \text{et} \quad \mathrm{F}r = \mathrm{F}r_0 + (r - r_0)\mathrm{F}'r_0, \quad r - r_0 = \dfrac{x_0^2}{r_0}\delta + \dfrac{y_0^2}{r_0}\delta' + \dfrac{z_0^2}{r_0}\delta''. \end{array}\right.$$

Substituons dans les expressions (77) en négligeant les carrés et produits des δ, δ', δ'' et en faisant passer leurs premières puissances hors des signes $\mathbf{S}$; puis posons pour abréger, en remarquant, vu l'isotropie primitive, que les sommes $\mathbf{S}$ restent les mêmes quand on y échange entre elles les coordonnées x_0, y_0, z_0 :

$$(78)\quad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\rho_0}{2}\mathbf{S}\, m\mathrm{F}r_0(x_0^4 \text{ ou } y_0^4) = a_4, \quad \dfrac{\rho_0}{2}\mathbf{S}\, m\mathrm{F}r_0 . x_0^2 y_0^2 = a_{2,2}, \\ \dfrac{\rho_0}{2}\mathbf{S}\, m\dfrac{\mathrm{F}'r_0}{r_0}(x_0^6 \text{ ou } y_0^6) = a_6, \quad \dfrac{\rho_0}{2}\mathbf{S}\, m\dfrac{\mathrm{F}'r_0}{r_0}(x_0^4 y_0^2 \text{ ou } x_0^4 z_0^2 \text{ ou } y_0^4 x_0^2 \text{ ou } y_0^4 z_0^2) = a_{4,2}, \\ \dfrac{\rho_0}{2}\mathbf{S}\, m\dfrac{\mathrm{F}'r_0}{r_0} x_0^2 y_0^2 z_0^2 = a_{2,2,2}; \end{array}\right.$$

nous obtenons les expressions suivantes :

$$(79)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{xxxx} = \dfrac{(1+\delta)^3}{(1+\delta')(1+\delta'')} a_4 + a_6\delta + a_{4,2}\delta' + a_{4,2}\delta'', \\ a_{yyyy} = \dfrac{(1+\delta')^3}{(1+\delta)(1+\delta'')} a_4 + a_{4,2}\delta + a_6\delta' + a_{4,2}\delta'', \\ a_{xyxy} = \dfrac{(1+\delta)(1+\delta')}{1+\delta''} a_{2,2} + a_{4,2}\delta + a_{4,2}\delta' + a_{2,2,2}\delta''. \end{array}\right.$$

Mais, toujours en vertu de l'isotropie primitive, on a les relations

$$(80)\qquad a_4 = 3a_{2,2}, \quad a_6 = 15\, a_{2,2,2}, \quad a_{4,2} = 3a_{2,2,2}\ [*].$$

Substituant, et multipliant entre elles les deux premières expres-

---

[*] Ce sont des particularisations de la formule générale suivante, trouvée par M. Cauchy (*Mémoire sur la dispersion de la lumière*, aux *Nouveaux Exercices*; Prague,

sions (79), en négligeant toujours les carrés et les produits des ∂, on trouve

$$(83)\quad a_{xxxx} \times a_{yyyy} = 9\left[\frac{(1+\partial)^2(1+\partial')^2}{(1+\partial'')^2}\, a_{2,2}^2 + a_{2,2}\,.\,a_{2,2,2}(6\partial + 6\partial' + 2\partial'')\right],$$

c'est-à-dire précisément *neuf fois* ce qu'on a en élevant au carré la

---

1835, p. 35), fr étant une fonction quelconque de la distance moléculaire r :

$$(81)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\rho}{2}\mathbf{S}\, m\, fr\,.\, x^\lambda y^\mu z^\nu = \dfrac{1.3\ldots(\lambda-1).1.3\ldots(\mu-1).1.3\ldots(\nu-1)}{1.3.5\ldots(\lambda+\mu+\nu-1)}.\frac{\rho}{2}\mathbf{S}\, m\, fr\,.\, x^{\lambda+\mu+\nu} \\ \qquad\qquad \text{si } \lambda,\ \mu,\ \nu \text{ sont pairs, et } = 0 \text{ si l'un d'eux est impair.} \end{array}\right.$$

Elle résulte de ce que l'isotropie autour d'un point M exige que si $r = \mathrm{M}m$ est sa distance à l'une des molécules m qui l'environnent de toutes parts, la somme $\mathbf{S}\, m\,.\, fr\,.\, x^{2n}$, relative à toutes, ne change pas de valeur quand on change à volonté la direction x sur laquelle les x sont les projections des r, en sorte qu'on a $\mathbf{S}\, m\, fr\,.\, x^{2n} = \mathbf{S}\, m\, fr\,.\, x'^{2n}$, les x' étant leurs projections sur une autre droite quelconque de direction x'. En effet, cette condition nécessaire à l'isotropie peut être écrite

$$\mathbf{S}\, m\, fr.\,(xc_{xx'} + yc_{yx'} + zc_{zx'})^{2n} = \mathbf{S}\, m\, fr\,.\, x^{2n}\,(c_{xx'}^2 + c_{yx'}^2 + c_{zx'}^2)^n.$$

Si l'on développe les puissances $2n$ et n des deux trinômes, on pourra faire passer les trois cosinus hors des $\mathbf{S}$, et égaler, dans les deux membres, les termes affectés des mêmes puissances ou des mêmes produits de puissances de ces cosinus; car, si l'on fait successivement chaque cosinus $= 1$ et les deux autres nuls, on a déjà des termes égaux, qu'on peut retrancher de part et d'autre; faisant ensuite l'un des trois d'entre eux nul, on peut diviser par le produit des deux autres et faire, dans l'équation quotient, l'un des deux restants $= 0$, l'autre $= 1$, etc., et obtenir ainsi successivement toutes les égalités de termes des deux membres. Remarquant ensuite que le terme général de $(\overline{x+y}+z)^m$ est

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\, z^p \,.\, \frac{(m-p)(m-p-1)\ldots(m-p-q+1)}{1.2\ldots q}\, y^q x^{m-p-q},$$

dont le coefficient est la même chose que

$$\frac{m(m-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots p.1.2\ldots q.1.2\ldots(m-p-q)},$$

3e expression (79) représentant l'*élasticité tangentielle* ou de glissement

$$a_{xy\,xy},$$

qui, lorsqu'on admet la loi des actions moléculaires, a la même valeur que l'*élasticité latérale* a_{xxyy}. On a donc, dans un corps ou un milieu élastique primitivement isotrope dont l'égale contexture en tous sens a été altérée d'une manière permanente par des dilatations ou com-

---

nous aurons, comme résultat de l'assimilation des termes des deux membres affectés du produit $c^{\lambda}_{xx'}\, c^{\mu}_{yx'}\, c^{\nu}_{zx'}$ de puissances de cosinus dont les exposants, tous pairs, ont toujours une somme $\lambda + \mu + \nu = 2n$, l'égalité suivante

$$\frac{1.2.3\ldots 2n}{1.2\ldots\lambda.1.2\ldots\mu.1.2\ldots\nu}\,\mathrm{S}\,m\,\mathrm{f}r.\mathrm{x}^{\lambda}\mathrm{y}^{\mu}\mathrm{z}^{\nu} = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots\frac{\lambda}{2}.1.2\ldots\frac{\mu}{2}.1.2\ldots\frac{\nu}{2}}\,\mathrm{S}\,m\,\mathrm{f}r.\mathrm{x}^{\lambda+\mu+\nu},$$

qui est la même chose que l'égalité (81); car, en multipliant haut et bas dans le second membre par 2^{2n}, puis par $1.3.5\ldots(2n-1)$, le numérateur du coefficient devient $1.2.3\ldots 2n$ comme dans le premier membre, et le dénominateur devient $1.3.5\ldots(2n-1)$ multiplié par $2.4\ldots\lambda.2.4\ldots\mu.2.4\ldots\nu$ dont l'inverse revient à $1.3\ldots(\lambda-1).1.3\ldots(\mu-1).1.3\ldots(\nu-1)$ divisé par le dénominateur

$$1.2\ldots\lambda.1.2\ldots\mu.1.2\ldots\nu$$

du premier membre. On voit aussi que si λ ou μ ou ν est impair, on a zéro dans le second membre.

M. Cauchy démontre aussi, à la page 186 du Mémoire cité, mais d'une manière compliquée, que

$$(82)\qquad \mathrm{S}\,m\,\mathrm{f}r.\mathrm{x}^{2n} = \frac{1}{2n+1}\,\mathrm{S}\,m\,\mathrm{f}r.r^{2n}.$$

On nous saura gré sans doute de le prouver ici d'une manière très-simple, savoir, en remarquant que si cette égalité (82) a lieu pour une certaine valeur de n, elle a lieu par cela seul pour une valeur plus grande d'une unité; car, comme $r^2 = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2$, et vu la formule (81), et celle (82) supposée établie pour l'exposant $2n$, on a

$$\mathrm{S}\,m\,\mathrm{f}r.\mathrm{x}^{2n+2} = \mathrm{S}\,m\,\mathrm{f}r.r^2.\mathrm{x}^{2n} - \mathrm{S}\,m\,\mathrm{f}r.\mathrm{x}^{2n}\mathrm{y}^2 - \mathrm{S}\,m\,\mathrm{f}r.\mathrm{x}^{2n}\mathrm{z}^2 =$$

$$= \frac{1}{2n+1}\,\mathrm{S}\,m\,\mathrm{f}r.r^2.r^{2n} - \frac{1.3\ldots(2n-1)}{1.3\ldots(2n+1)}.2.\,\mathrm{S}\,m\,\mathrm{f}r.\mathrm{x}^{2n+2};$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{S}\,m\,\mathrm{f}r.\mathrm{x}^{2n+2} = \frac{1}{1+\frac{2}{2n+1}}.\frac{1}{2n+1}\,\mathrm{S}\,m\,\mathrm{f}r.r^2.r^{2n},$$

pressions dans les trois sens x_0, y_0, z_0 ou x, y, z,

$$2\,a_{xyxy} + a_{xxyy} = \sqrt{a_{xxxx} \cdot a_{yyyy}},$$

et des égalités semblables en y et z, z et x, c'est-à-dire précisément les relations (57) de distribution ellipsoïdale des inverses de racines quatrièmes des *élasticités directes* autour d'un point.

Nous avons, il est vrai, négligé dans le calcul, comme on a fait jusqu'ici dans tous ceux d'un genre analogue, les termes affectés des carrés et produits des dilatations ou compressions permanentes opérées δ, δ', δ''. On ne pourrait apprécier l'influence de ces termes que si l'on connaissait la forme de la fonction fr, car leurs coefficients seraient des sommes comme (81) contenant, dans fr, les dérivées successives de cette fonction inconnue. Mais cette influence négligée ne peut produire que de très-faibles erreurs, si l'on considère que les écrouissages et la trempe, qui changent très-sensiblement la ténacité et les coefficients d'élasticité, altèrent à peine la densité des corps. On peut d'ailleurs s'assurer, par un calcul, que les portions ainsi négligées de l'expression de $3\,a_{xyxy}$ sont constamment comprises entre les portions correspondantes de celles de a_{xxxx} et a_{yyyy}, en sorte qu'en supposant même qu'elles altèrent légèrement les valeurs absolues de ces trois coefficients, elles n'altéreront pas sensiblement pour cela la relation de moyenne proportionnalité de $3\,a_{xyxy}$ entre a_{xxxx} et a_{yyyy}, donnée par les termes du premier ordre en δ, δ', δ'' [*].

La contexture élastique définie par les relations (57), telles que $3\,d$ ou $2\,d + d' = \sqrt{bc}$, doit donc être celle des métaux amorphes, et des solides tels que sont les matériaux employés dans les constructions, au moins lorsque leurs élasticités mesurées dans trois sens n'ont pas entre elles des rapports de grandeur considérables (comme de plus de 3 à 2 ou de 2 à 1), et que leurs molécules n'ont évidemment pas affecté de

---

ou la formule (82) avec $n+1$ à la place de n. Or cette formule est vraie pour $n = 1$, car

$$\mathrm{S}\, m\, fr.r^2 = \mathrm{S}\, m\, fr\,(x^2 + y^2 + z^2) = 3\,\mathrm{S}\, m\, fr.x^2.$$

Donc elle est vraie pour toutes les valeurs de n.

[*] Conservons en effet seulement dans ce calcul, pour simplifier, celle des trois

préférence certaines orientations en se déposant, ou bien en se rangeant à nouveau par suite de modifications mécaniquement opérées. Et, lors même que cette dernière circonstance peut s'offrir, ou bien que les rapports entre les élasticités sont beaucoup plus considérables qu'on ne vient de dire, c'est encore cette contexture, ou ces relations entre les coefficients, qu'il convient le mieux d'adopter dans la pratique pour les corps non cristallisés, au moins tant que des mesurages d'élasticités dans un certain nombre d'autres sens ne commanderont pas de s'en écarter sensiblement. (*Voyez* § V ci-après, n° **29**.)

---

dilatations ou compressions permanentes qui a été imprimée parallèlement aux x, ce qui suffira pour la conclusion ; nous avons

$$r - r_0 = \sqrt{x_0^2(1+\delta)^2 + y_0^2 + z_0^2} - r_0 = r_0\left[\left(1 + \frac{2\delta + \delta^2}{r_0^2}x_0^2\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right]$$

$$= \frac{x_0^2}{r_0}\left(\delta + \frac{\delta^2}{2}\right) - \frac{x_0^4}{2r_0^3}\left(\delta + \frac{\delta^2}{2}\right)^2 + \frac{x_0^6}{2r_0^5}\left(\delta + \frac{\delta^2}{2}\right)^3 - \frac{5x_0^8}{8r_0^7}\left(\delta + \frac{\delta^2}{2}\right)^4 + \ldots;$$

et $$Fr = Fr_0 + (r - r_0)F'r_0 + (r - r_0)^2\frac{F''r_0}{2} + (r - r_0)^3\frac{F'''r_0}{6} + (r - r_0)^4\frac{F^{\text{IV}}r_0}{24} + \ldots,$$

qui, en substituant, et faisant

$$Fr_0 = F_0,\quad \frac{F'r_0}{r_0} = F_2,\quad \frac{1}{2}\left(\frac{F''r_0}{r_0^2} - \frac{F'r_0}{r_0^3}\right) = F_4,\quad \frac{1}{2}\left(\frac{F'''r_0}{3r_0^3} - \frac{F''r_0}{r_0^4} + \frac{F'r_0}{r_0^5}\right) = F_6, \text{ etc.},$$

peut être écrit

$$Fr = F_0 + x_0^2\left(\delta + \frac{\delta^2}{2}\right)F_2 + x_0^4\left(\delta + \frac{\delta^2}{2}\right)^2 F_4 + x_0^6\left(\delta + \frac{\delta^2}{2}\right)^3 F_6 + \ldots.$$

Or on a

$$a_{xxxx} \text{ ou } a_{yyyy} \text{ ou } a_{xyxy} = \frac{\rho_0}{2(1+\delta)}\mathbf{S}\, m\left[x_0^4(1+\delta)^4 \text{ ou } y_0^4 \text{ ou } x_0^2y_0^2(1+\delta)^2\right]Fr.$$

Mettant pour Fr son développement et faisant pour abréger, comme tout à l'heure,

$$\frac{\rho_0}{2}\mathbf{S}\, mF_{n+n'-4}\,x_0^n\,y_0^{n'} = a_{n,n'}, \tag{84}$$

nous avons

$$(85)\quad \begin{cases} a_{xxxx} = (1+\delta)^3\left[a_4 + a_6\left(\delta + \frac{\delta^2}{2}\right) + a_8\left(\delta + \frac{\delta^2}{2}\right)^2 + a_{10}\left(\delta + \frac{\delta^2}{2}\right)^3 + \ldots\right], \\ a_{yyyy} = \frac{1}{1+\delta}\left[a_4 + a_{4,2}\left(\delta + \frac{\delta^2}{2}\right) + a_{4,4}\left(\delta + \frac{\delta^2}{2}\right)^2 + a_{4,6}\left(\delta + \frac{\delta^2}{2}\right)^3 + \ldots\right], \\ a_{xyxy} = (1+\delta)\left[a_{2,2} + a_{4,2}\left(\delta + \frac{\delta^2}{2}\right) + a_{6,2}\left(\delta + \frac{\delta^2}{2}\right)^2 + a_{8,2}\left(\delta + \frac{\delta^2}{2}\right)^3 + \ldots\right]. \end{cases}$$

§ IV. — *Conséquence, en ce qui regarde la théorie du mouvement de la lumière dans les milieux non isotropes, en tenant compte des pressions antérieures aux vibrations excitées.*

17. *Propagation des ondes planes dans de pareils milieux.* — On sait, depuis les recherches de Cauchy [*] (et les calculs ci-après vont d'ailleurs le faire voir), qu'une *onde plane* provoquée par un ébranlement dans un milieu homogène non isotrope, comme doit être le fluide éthéré dans les corps transparents qui sont, ou cristallisés en polyèdres non

---

Mais, en vertu de la formule (81) démontrée à la note précédente, on a aussi

$$a_{2,2} = \frac{1}{3} a_4, \quad a_{4,2} = \frac{1}{5} a_6, \quad a_{6,2} = \frac{1}{7} a_8, \quad a_{8,2} = \frac{1}{9} a_{10}, \quad a_{10,2} = \frac{1}{11} a_{12},$$
$$a_{4,4} = \frac{3}{35} a_8, \quad a_{4,6} = \frac{1}{21} a_{10}, \quad a_{4,8} = \frac{1}{33} a_{12}.$$

Donc, en multipliant par 3 la troisième expression, on obtient

$$(86)\left\{\begin{aligned}
a_{xxxx} &= (1+\partial)^3 a_4 + a_6\left(\partial + \frac{7}{2}\partial^2 + \frac{9}{2}\partial^3 + \frac{5}{2}\partial^4\right) + a_8(\partial^2 + 4\partial^3 + 8\partial^4) + \\
&\quad + a_{10}\left(\partial^3 + \frac{9}{2}\partial^4\right) + a_{12}\partial^4 + \ldots, \\
a_{yyyy} &= \frac{1}{1+\partial} a_4 + a_6\left(\frac{\partial}{5} - \frac{1}{10}\partial^2 + \frac{1}{10}\partial^3 - \frac{1}{10}\partial^4\right) + a_8\left(\frac{3}{35}\partial^2 + \frac{3}{140}\partial^4\right) + \\
&\quad + a_{10}\left(\frac{1}{21}\partial^3 + \frac{1}{42}\partial^4\right) + a_{12}\frac{\partial^4}{33} + \ldots, \\
3a_{xyxy} &= (1+\partial) a_4 + a_6\left(\frac{3}{5}\partial + \frac{9}{10}\partial^2 + \frac{3}{10}\partial^3\right) + a_8\left(\frac{3}{7}\partial^2 + \frac{6}{7}\partial^3 + \frac{15}{28}\partial^4\right) + \\
&\quad + a_{10}\left(\frac{1}{3}\partial^3 + \frac{5}{6}\partial^4\right) + a_{12}\frac{3\partial^4}{11} + \ldots,
\end{aligned}\right.$$

où chaque partie de $3a_{xyxy}$ est bien comprise entre les parties correspondantes de a_{xxxx} et a_{yyyy}.

[*] *Bulletin des Sciences* (Férussac), t. XIII, n° 217, Mémoire lu les 1er mai, 7 et 14 juin 1830. — *Exercices de Mathématiques*, 5e année (1830), *Application des formules, etc., à la théorie de la lumière ;* et ensuite, *Mémoire sur la dispersion* (1830, achevé à Prague en 1835).

réguliers, ou inégalement comprimés en divers sens, se divise généralement, de chaque côté, en trois autres ondes se propageant parallèlement à elles-mêmes avec des vitesses dont les grandeurs sont mesurées par les inverses des trois demi-axes d'un certain ellipsoïde qui dépend, non-seulement des coefficients d'élasticité $a_{xxxx}, \ldots a_{yyx}$ du milieu, mais encore de l'inclinaison particulière qu'y affectent les plans des ondes, tandis que les directions des mêmes demi-axes donnent celles des mouvements vibratoires rectilignes dont les molécules sont animées dans chaque onde; que, lorsque le milieu est isotrope, deux de ces ondes se réunissent en une seule où les vibrations moléculaires, alors généralement curvilignes, sont *transversales*, c'est-à-dire parallèles aux plans des ondes, ou perpendiculaires à la direction de leur propagation (direction qui est *alors* la même que celle du rayon lumineux résultant de leurs intersections mutuelles), pendant que les vibrations, dans la troisième onde, sont *longitudinales*, et, en vertu d'une constitution de notre organe, ne donnent lieu à aucune sensation de lumière, de sorte que le rayon reste unique dans un milieu de cette espèce; enfin que, réciproquement, le parallélisme des vibrations à toutes les ondes exige l'isotropie; d'où il suit que ce parallélisme ne peut avoir lieu *exactement* dans les cristaux biréfringents, et que la partie de la théorie de Fresnel, qui se base sur son hypothèse de la transversalité des mouvements vibratoires jusque dans l'intérieur de ces cristaux, ne peut être vraie que par approximation.

Or, en 1839, l'illustre géomètre-physicien George Green, attribuant, comme Cauchy et Fresnel, la propagation de la lumière aux actions entre les particules de l'éther, et reconnaissant tout d'abord, comme celui-là, que les vibrations dans les cristaux biréfringents ne sont pas toujours exactement parallèles aux plans des ondes, mais voulant, dit-il [*], pour ne pas s'engager dans des considérations trop compliquées et sans chances d'application pratique, *borner son analyse aux milieux où ce parallélisme s'observerait rigoureusement*, ce qu'avant

[*] *On the Propagation of Light in crystallised Media*, lu le 20 mai 1839 (*Transactions of the Cambridge Society*, vol. VII, p. 122), faisant suite au Mémoire *On the Reflexion and Refraction of Light*, lu le 11 décembre 1837 (inséré au même volume, p. 2).

tout examen il suppose compatible avec l'hétérotropie, se détermina à rejeter les formules à *quinze* coefficients fournies à Cauchy par l'hypothèse, trop restrictive selon lui, « que les actions entre les particules s'exercent suivant leurs lignes de jonction; » et, en faisant, après quelques considérations et tâtonnements, une autre hypothèse qui, nous le pensons, ne peut être justifiée que par celle-là, à savoir que le potentiel Φ (n° 2) est nécessairement développable suivant les puissances entières et positives des six petites quantités que nous avons appelées $\partial_x, \partial_y, \ldots, g_{xy}$ ci-dessus [*], il adopta pour cette fonction Φ, sans autre démonstration, la formule (6) du second degré à *vingt et un* coefficients $a_{xxxx}, \ldots a_{yyyx}$, et, au moyen de la latitude que lui fournissait l'expédient d'un tel nombre de constantes, il chercha quelles relations devaient exister entre elles *pour que les mouvements vibratoires dans deux des ondes* (car il en reconnaît trois comme Cauchy) [**] *fussent toujours exactement* (accurately, rigorously) *transversaux ou parallèles à leurs plans*, comme l'a supposé Fresnel.

Ces relations ou équations de condition sont, comme on va voir, les suivantes, au nombre de quatorze :

$$(87)\quad \begin{cases} a_{xxxx}=a_{yyyy}=a_{zzzz}=2\,a_{yzyz}+a_{yyzz}=2\,a_{zxzx}+a_{zzxx}=2\,a_{xyxy}+a_{xxyy}, \\ a_{xxyz}+2\,a_{zxxy}=0,\quad a_{yyzx}+2\,a_{xyyz}=0,\quad a_{zzxy}+2\,a_{yzzx}=0, \\ a_{yyyz}=0,\quad a_{zzzy}=0,\quad a_{zzzx}=0,\quad a_{xxxz}=0,\quad a_{xxxy}=0,\quad a_{yyyx}=0. \end{cases}$$

Il est facile de reconnaître qu'elles sont les mêmes que celles qui ont

---

[*] Le principe regardé par lui comme moins restrictif que celui de Cauchy est (commencement des deux Mémoires cités) « que de quelque manière que les parties d'un système matériel agissent les unes sur les autres, si l'on multiplie toutes les forces s'exerçant ainsi à son intérieur par les éléments de leurs directions, la somme totale des produits, pour une portion déterminée quelconque de la masse, est toujours une différentielle exacte de quelque fonction. » Mais il ne s'en tient pas à ce principe, qui, en effet, est insuffisant; on ne voit même pas qu'il s'en serve ni même l'exprime analytiquement, car il n'est question dans son travail, ni des actions individuelles, ni de leurs *directions*, qu'il a, de prime abord, fait profession d'ignorer complétement.

[**] Il accorde même que, sans l'intervention du rayon non éclairant provenant de la troisième onde, il est impossible de satisfaire aux conditions à remplir à la surface de séparation de deux milieux.

été trouvées par M. Lamé (*Leçons sur l'Élasticité*, 1852, §§ 92 et 93) comme *conditions de biréfringence* avec vibrations transversales. Seulement, le géomètre français exige vingt-quatre conditions parce qu'il suppose trente-six coefficients indépendants (n° **2** ci-dessus) au lieu de vingt et un. (*Voir* la 1re note du numéro suivant **18**.)

Or nous pensons et nous espérons montrer que ces conditions n'expriment que l'*isotropie*; d'où l'impossibilité, non pas, comme nous verrons, de l'exacte représentation de la marche des rayons par la surface d'onde à deux nappes découverte par Fresnel, mais de l'exact parallélisme des vibrations aux ondes dans les milieux hétérotropes, excepté pour des directions particulières, au nombre de seize au plus, probablement de trois seulement, du plan des ondes.

Pour le faire voir, montrons d'abord, en reproduisant l'établissement de ces quatorze relations (87), qu'elles sont absolument les mêmes lorsque le milieu n'était pas, avant les ébranlements produits, dans l'état que nous avons appelé *naturel*, c'est-à-dire lorsqu'il y avait des pressions de grandeur et de direction quelconque antérieurement aux déplacements moléculaires relatifs résultant des ébranlements; de sorte qu'on ne puisse pas attribuer à ces pressions primitives, souvent omises, une influence contraire aux conclusions que nous tirerons.

Attribuons donc, avec Green, aux déplacements u, v, w (n° **2**) des points, estimés parallèlement à leurs coordonnées rectangles x, y, z, les valeurs suivantes qui, si f est une fonction quelconque, périodique ou non, représentent de la manière la plus générale le mouvement par *ondes planes* parallèles, dont la normale fait avec les x, y, z des angles dont les cosinus sont

$$l,\ m,\ n,$$

et se propageant avec une vitesse uniforme

$$\mathrm{V}$$

ou parcourant $\mathrm{V}t$ dans le temps t :

$$(88)\quad \left\{\begin{array}{l} u = \alpha f(lx + my + nz - \mathrm{V}t), \quad v = \beta f(lx + my + nz - \mathrm{V}t), \\ \qquad\qquad w = \gamma f(lx + my + nz - \mathrm{V}t), \end{array}\right.$$

expressions où

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma$$

sont les cosinus des angles formés avec les x, y, z par le déplacement moléculaire $f(\ldots)$ qui, comme on voit, dans cette sorte de mouvement, est de même direction comme de même grandeur à chaque instant pour tous les points situés dans chaque plan d'onde représenté par

$lx + my + nz =$ *une constante* (qui est la distance de ce plan à l'origine);

déplacement le même aussi, pour ce plan, à l'époque actuelle marquée par le temps t, qu'il sera à l'époque $t + \mathrm{T}$, sur un second plan qui est actuellement moins distant de VT à l'origine, ce qui donne bien V pour la vitesse de propagation des déplacements (88) dans le milieu.

En mettant les expressions (88) pour u, v, w dans les équations générales d'équilibre (19), ou, symboliquement écrites, (38), après avoir substitué les *inerties* par unité de volume

$$-\rho\frac{d^2u}{dt^2},\quad -\rho\frac{d^2v}{dt^2},\quad -\rho\frac{d^2w}{dt^2}$$

aux forces $\rho\mathrm{X}$, $\rho\mathrm{Y}$, $\rho\mathrm{Z}$, et en divisant tout, ensuite, par

$$2\rho f''(lx + my + nz - \mathrm{V}t),$$

faisons, pour abréger,

$$(89)\quad \begin{cases} \mathrm{P} = (p_x^0 l + p_y^0 m + p_z^0 n)^2 \\ \quad = p_{xx}^0 l^2 + p_{yy}^0 m^2 + p_{zz}^0 n^2 + 2p_{yz}^0 mn + 2p_{zx}^0 nl + 2p_{xy}^0 lm\,; \end{cases}$$

$$(90)\quad \begin{cases} \mathrm{A} = \mathrm{a}_x(\mathrm{a}_x l + \mathrm{a}_y m + \mathrm{a}_z n)\,.\,\mathrm{a}_x(\mathrm{a}_x l + \mathrm{a}_y m + \mathrm{a}_z n) = \\ \quad = \mathrm{a}_{xxxx} l^2 + \mathrm{a}_{xyxy} m^2 + \mathrm{a}_{zxzx} n^2 + 2\mathrm{a}_{zxxy} mn + 2\mathrm{a}_{xxxz} nl + 2\mathrm{a}_{xxyx} lm, \\ \mathrm{B} = \mathrm{a}_y(\ldots)\,.\,\mathrm{a}_y(\ldots) \\ \quad = \mathrm{a}_{xyxy} l^2 + \mathrm{a}_{yyyy} m^2 + \mathrm{a}_{yzyz} n^2 + 2\mathrm{a}_{yyyz} mn + 2\mathrm{a}_{xyyz} nl + 2\mathrm{a}_{yyyx} lm, \\ \mathrm{C} = \mathrm{a}_z(\ldots)\,.\,\mathrm{a}_z(\ldots) \\ \quad = \mathrm{a}_{zxzx} l^2 + \mathrm{a}_{yzyz} m^2 + \mathrm{a}_{zzzz} n^2 + 2\mathrm{a}_{zzzy} mn + 2\mathrm{a}_{zzzx} nl + 2\mathrm{a}_{yzzx} lm, \\ \mathrm{D} = \mathrm{a}_y(\mathrm{a}_x l + \mathrm{a}_y m + \mathrm{a}_z n)\,.\,\mathrm{a}_z(\mathrm{a}_x l + \mathrm{a}_y m + \mathrm{a}_z n) = \\ \quad = \mathrm{a}_{zxxy} l^2 + \mathrm{a}_{yyyz} m^2 + \mathrm{a}_{zzzy} n^2 + \\ \qquad + (\mathrm{a}_{yyzz} + \mathrm{a}_{yzyz})\, mn + (\mathrm{a}_{zzxy} + \mathrm{a}_{yzzx})\, nl + (\mathrm{a}_{yyzx} + \mathrm{a}_{xyyz})\, lm, \end{cases}$$

$$(90)\ (\text{suite})\quad \begin{cases} E = a_z(\ldots).a_x(\ldots) = \\ \quad = a_{xxxz}\,l^2 + a_{xyyz}\,m^2 + a_{zzzx}\,n^2 \\ \qquad + (a_{zzxy} + a_{yzzx})\,mn + (a_{zzxx} + a_{zxzx})\,nl + (a_{xxyz} + a_{zxxy})\,lm, \\ F = a_x(\ldots).a_y(\ldots) = \\ \quad = a_{xxxy}\,l^2 + a_{yyyx}\,m^2 + a_{yzzx}\,n^2 \\ \qquad + (a_{yyzx} + a_{xyyz})\,mn + (a_{xxyz} + a_{zxxy})\,nl + (a_{xyxy} + a_{xxyy})\,lm, \end{cases}$$

ce qui revient à construire, avec M. Haughton, *six ellipsoïdes fixes* dont les équations en coordonnées rectangles sont données par les formules (90) en mettant 1 pour les premiers membres et x, y, z pour l, m, n, puis à mesurer leurs rayons vecteurs tous de même direction (l, m, n) normale aux plans des ondes, et à appeler A, B, ..., F les *inverses des carrés de ces rayons* [*]. Nous obtenons, avec ces notations, trois équations contenues dans

$$(91)\qquad \frac{A\alpha + F\beta + E\gamma}{\alpha} = \frac{F\alpha + B\beta + D\gamma}{\beta} = \frac{E\alpha + D\beta + C\gamma}{\gamma} = \rho V^2 - P.$$

Ce sont les conditions du mouvement par ondes planes qu'expriment les équations (88), ou les relations nécessaires entre les coefficients d'élasticité a du milieu, la vitesse V de propagation et les deux directions (α, β, γ) du mouvement moléculaire, et (l, m, n) des normales aux ondes.

---

[*] *On Equilibrium and Motion, etc.*, p. 170. Ces six quantités A, B, ..., F, si l'on admet l'interversion possible des sous-lettres dans les coefficients de leurs développements, ou le principe des égalités complémentaires (8), peuvent être aussi écrites

$$(a_{xx} \text{ ou } a_{yy} \ldots \text{ ou } a_{zz})(a_x l + a_y m + a_z n)^2 = a_{xxx'x'} \text{ ou } a_{yyx'x'} \text{ ou } \ldots a_{zzx'x'},$$

en appelant x' la direction de la normale à l'onde; et elles ne sont autre chose que les six composantes de pression $p^1_{xx}, p^1_{yy}, \ldots, p^1_{xy}$ sur les faces perpendiculaires aux x, y, z, produites par une dilatation $\delta_{x'} = 1$ perpendiculaire à l'onde, ou, ce qui revient au même quant aux valeurs, celles de la pression normale $p^1_{x'x'}$ à l'onde engendrée successivement par des dilatations et des glissements $\delta_x, \delta_y, \ldots, g_{zy}$ d'une grandeur $= 1$.

Ce sont aussi, comme l'a remarqué Cauchy, les six dérivées secondes, par rapport à l^2, m^2, n^2, mn, nl, lm, d'une même expression en l, m, n, qui n'est autre chose que le $\frac{1}{12}$ de celle (39) de $A = a_{x'x'x'x'}$ quand on remplace $c_{xx'}$, $c_{yx'}$, $c_{zx'}$ par l, m, n.

En les écrivant

$$(A + P - \rho V^2)\alpha = -F\beta - E\gamma,$$
$$(B + P - \rho V^2)\beta = -D\gamma - F\alpha,$$
$$(C + P - \rho V^2)\gamma = -E\alpha - D\beta,$$

et en les multipliant l'une par l'autre, puis en remplaçant, dans les produits tels que $D^2\beta\gamma(-F\beta - E\gamma)$, la parenthèse, qui est un second membre, par le premier membre équivalent, les cosinus inconnus α, β, γ disparaissent, et l'on obtient l'équation du troisième degré en V^2 seul

$$(92)\left\{\begin{array}{l}(A + P - \rho V^2)(B + P - \rho V^2)(C + P - \rho V^2) - D^2(A + P - \rho V^2) - \\ \quad - E^2(B + P - \rho V^2) - F^2(C + P - \rho V^2) + 2DEF = 0;\end{array}\right.$$

d'où résulte bien la division d'une onde plane, en général, en trois autres qui se propagent avec des vitesses différentes.

Et, comme on obtient une quatrième fraction égale à celles qui forment les trois premiers membres de l'égalité multiple (91), en prenant pour numérateur la somme des numérateurs et pour dénominateur la somme des dénominateurs, après les avoir multipliées haut et bas par α, par β, par γ respectivement, ce qui donne

$$(93)\qquad A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\gamma\alpha + 2F\alpha\beta = \rho V^2 - P,$$

équation en coordonnées polaires d'un ellipsoïde dont le rayon vecteur $\frac{1}{\sqrt{\rho V^2 - P}}$ fait avec les x, y, z des angles dont les cosinus sont α, β, γ; d'où, de nouveau, les équations (91) comme conditions de maximum ou de minimum du rayon vecteur en combinant avec $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, d'où $\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0$, la différentielle de (93) égalée à zéro, l'on voit, et la forme connue des équations (91) et (92) montre d'ailleurs :

1° Que les trois demi-axes de cet ellipsoïde, dont l'équation en coordonnées ordinaires est

$$(94)\qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 1,$$

donneront, en grandeur, les inverses des trois valeurs de $\sqrt{\rho V^2 - P}$.

2° Que leurs directions, rectangulaires entre elles, donneront celles des mouvements moléculaires dans chaque onde, ou les trois systèmes correspondants de valeurs des cosinus α, β, γ.

On voit que les résultats sont les mêmes que ceux qui sont déjà connus et relatifs au cas où les pressions antérieures p^0 sont nulles, sauf

$$\sqrt{V^2 - \frac{P}{\rho}} \text{ au lieu des vitesses de propagation } V.$$

On voit aussi, d'après la formule générale (25) de changement de plan de pression, qui donne $p_{x'x'} = p_{xx}\, c_{xx'}^2 + \ldots + 2 p_{xy}\, c_{xx'}\, c_{yx'}$, que la quantité (89)

$$P$$

n'est autre chose que la *composante normale de la pression supportée, avant les déplacements, par l'unité d'une face menée parallèlement aux ondes par le point* (x, y, z).

Si cette pression primitive est égale en tous sens et si le milieu est isotrope, il résulte des conditions d'isotropie (62) $a = b = c = 2d + d' = \ldots$ que les équations (92), (94) peuvent être mises sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \left(V^2 - \dfrac{P+a}{\rho}\right)\left(V^2 - \dfrac{P+d}{\rho}\right)^2 = 0, \\ d(x^2 + y^2 + z^2) + (a - d)(lx + my + nz)^2 = 1, \end{array}\right.$$

montrant bien que deux des trois ondes planes se réduisent à une, dont la vitesse de propagation est $\sqrt{\dfrac{P+d}{\rho}}$, et que l'ellipsoïde (94) est coupé suivant des cercles par leurs plans $lx + my + nz = \text{const.}$, en sorte que leurs vibrations s'exécutent parallèlement à ces plans.

Mais voyons si le même parallélisme est possible sans l'isotropie.

18. *Sur les conditions pour que les mouvements moléculaires dans deux des ondes soient toujours parallèles à leurs plans.* — Il faut pour cela, comme l'observe Green, que dans la troisième onde ils soient normaux, et que par conséquent les équations (91) subsistent en met-

tant l, m, n au lieu de α, β, γ, c'est-à-dire qu'on ait

$$(95)\qquad \frac{Al+Fm+En}{l}=\frac{Fl+Bm+Dn}{m}=\frac{El+Dm+Cn}{n},$$

ce qui est d'ailleurs aussi la condition pour que le plan d'onde $lx+my+nz=0$ soit bissecteur de toutes les cordes de l'ellipsoïde (94) qui lui sont perpendiculaires, et contienne par conséquent deux de ses axes [*].

Nous voyons que

$$P=p^0_{xx}l^2+p^0_{yy}m^2+\ldots+2p^0_{xy}lm$$

n'y entre pas. Ces conditions (95) de transversalité de deux des directions des mouvements moléculaires sont donc indépendantes des six composantes p^0, quelles qu'elles soient, des *pressions antérieures;* en

---

[*] Si l'on élimine les deux rapports $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ entre les équations (91) sans le dernier membre, combinées avec $l\alpha+m\beta+n\gamma=0$ qui exprime *le parallélisme des mouvements moléculaires aux plans des ondes*, on obtient facilement, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ représentant les trois excès, divisés respectivement par l, m, n, de la seconde sur la troisième fraction (95), de la troisième sur la première et de la première sur la deuxième de ces mêmes fractions (d'où $l\mathfrak{L}+m\mathfrak{M}+n\mathfrak{N}=0$),

$$\frac{A\mathfrak{L}+F\mathfrak{M}+E\mathfrak{N}}{\mathfrak{L}}=\frac{F\mathfrak{L}+B\mathfrak{M}+D\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}=\frac{E\mathfrak{L}+D\mathfrak{M}+C\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}},$$

ou *une seule équation*

$$(B-C)\mathfrak{M}\mathfrak{N}+D(\mathfrak{N}^2-\mathfrak{M}^2)+(F\mathfrak{N}-E\mathfrak{M})\mathfrak{L}=0,$$

car les deux autres de même forme que fournit cette égalité multiple rentrent dans celle-ci. Cette équation n'est pas satisfaite seulement par $\mathfrak{M}=0$, $\mathfrak{N}=0$, c'est-à-dire par les égalités (95); elle l'est aussi de plusieurs autres manières donnant, entre les coefficients a_{xxx}, etc., si elle doit l'être quelles que soient $\frac{m}{l}$, $\frac{n}{l}$ ou les directions des ondes, des relations du troisième degré nombreuses et fort compliquées. Mais on doit observer que ces relations sont inutiles à considérer dans la théorie de la double réfraction ainsi présentée; car, comme l'observe M. Lamé, quand on remplit la condition de *transversalité* $l\alpha+m\beta+n\gamma=0$ sans que ce soit par les égalités (95), on n'a qu'une seule valeur de chacun des deux rapports $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$; par conséquent une seule onde, et pas de biréfringence.

sorte qu'on ne peut pas chercher, dans l'existence possible de pareilles pressions, la réponse aux difficultés auxquelles il va être montré que conduit l'hypothèse d'exacte transversalité des mouvements pour toutes les directions des ondes.

Elles peuvent être satisfaites de deux manières, savoir :

1° *Pour certains systèmes seulement de valeurs des cosinus l, m, n,* c'est-à-dire *pour certaines directions de la normale au plan des ondes*, dans un milieu quelconque.

Ces directions de la normale aux ondes sont précisément *celles de maxima et minima des élasticités directes* $a_{x'x'x'x'}$ que nous avons considérées au n° **10**.

En effet, si l'on substitue à A, F, E leurs expressions (90) du numéro précédent dans le premier membre de l'équation (95), on a

$$(96)\qquad \frac{Al + Fm + En}{l} = \frac{a_x(a_x l + a_y m + a_z n).(a_x l + a_y m + a_z n)^2}{l}.$$

C'est, en égard à la formule symbolique (33), et en mettant

$$c_{xx'},\ c_{yx'},\ c_{zx'} \text{ pour } l,\ m,\ n,$$

la même chose que le premier membre $\frac{a_x a_{x'} . a_{x'} a_{x'}}{c_{xx'}}$ de la triple équation (41) donnant les directions x' des maxima et minima de $a_{x'x'x'x'}$, car $a_{x'} = a_x c_{xx'} + a_y c_{yx'} + a_z c_{zx'}$. Et il y a également parité entre les seconds membres comme entre les troisièmes membres de (41) et de (95).

Donc il existe toujours des plans d'ondes auxquels deux des mouvements moléculaires correspondants sont exactement parallèles, le troisième exactement perpendiculaire. Ce sont les plans parallèles à ceux qui touchent la surface dont les rayons vecteurs sont les inverses des $\sqrt[4]{a_{x'x'x'x'}}$, aux extrémités des divers diamètres principaux ou coupant cette surface normalement. Il y a toujours *trois* directions de ces plans d'onde. Il y en aurait même (n° **10**) jusqu'à *seize* ou (n° **12**) *treize* si l'éther, dans les corps cristallisés, avait une contexture aussi variée que ces corps eux-mêmes.

2° *Pour toutes les ondes possibles*, si l'on fait remplir aux coefficients $a_{xxxx}, \ldots, a_{xyxy}$ certaines conditions. On les détermine en chas-

sant les dénominateurs des équations (95), ce qui donne

$$(a_{xx}l^2 + a_{yy}m^2 + a_{zz}n^2 + 2a_{yz}mn + 2a_{zx}nl + 2a_{xy}lm) \times$$
$$\times (a_x l + a_y m + a_z n)(a_y n - a_z m) = 0$$

et deux autres égalités semblables où le dernier facteur sera

$$a_z l - a_x n \quad \text{ou} \quad a_x m - a_y l,$$

puis développant et égalant à zéro ce qui affecte une même puissance ou un même produit des cosinus l, m, n dont les rapports $\frac{m}{l}$, $\frac{n}{l}$ doivent être indépendants l'un de l'autre. Or on trouve ainsi les équations de condition (87) de Green.

En supposant pour un instant ces quatorze équations, entre les vingt et un coefficients, compatibles avec l'hétérotropie, on en tire les lois de Fresnel (sauf le parallélisme au lieu de la perpendicularité des mouvements aux plans de polarisation) sans être nullement obligé d'introduire dans l'analyse ci-dessus, comme a fait le premier M. Mac-Cullagh [*], l'hypothèse peu justifiée de Fresnel « que les vibrations ne changent nulle part la densité de l'éther, » ou de faire $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$ dans les formules, *ce qui revient à effacer tous les termes affectés des coefficients d'élasticité directe* a_{xxxx}, a_{yyyy}, a_{zzzz}, comme si ces coefficients étaient nuls [**].

---

[*] *An Essay towards a dynamical Theory of crystalline Reflexion and Refraction*, read december 1839 (*Trans. of Irish Academy*, vol. XXI, p. 18 et 25).

[**] Car, au moyen des égalités de Green (87) $a_{xxxx} = 2a_{xyxy} + a_{xxyy} = 2a_{zxzx} + a_{zzxx}$, l'on a, par exemple, d'après la première expression (1),

$$p^1_{xx} = a_{xxxx}\partial_x + (a_{xxxx} - 2a_{xyxy})\partial_y + (a_{xxxx} - 2a_{zxzx})\partial_z + a_{xxyz}g_{yz} + a_{xxxz}g_{zx} + a_{xxxy}g_{xy},$$

qui, si $\partial_x + \partial_y + \partial_z = 0$, se réduit à

$$p^1_{xx} = -2a_{xyxy}\partial_y - 2a_{zxzx}\partial_z + a_{xxyz}g_{yz} + \ldots,$$

absolument comme si a_{xxxx} était $= 0$.

M. Haughton, à la fin de son Mémoire *A Classification of elastic Media* (*Irish Acu-*

En effet, prenons, pour simplifier, comme font tous les auteurs, trois nouveaux axes rectangulaires x', y', z' de manière à avoir

$$a_{x'x'y'z'} = 0, \quad a_{y'y'z'x'} = 0, \quad a_{z'z'x'y'} = 0,$$

ce qui est possible puisqu'on dispose de trois des neuf angles (x, x'), (x, y'), etc., et ce qui entraîne, d'après les conditions (87),

$$a_{z'x'x'y'} = 0, \quad a_{x'y'y'z'} = 0, \quad a_{y'z'z'x'} = 0.$$

Cela revient à ne conserver que les neuf coefficients de la première ligne des conditions (87), ou à rapporter le milieu aux trois plans de symétrie de contexture qu'il possède, comme on voit, quand ces conditions de Green sont supposées remplies. Alors, en se servant des notations abrégées (48) $a_{xxxx} = a, \ldots, a_{yzyz} = d, \ldots$, les expressions (90) se réduisent à

$$(97)\quad \begin{cases} A = al^2 + fm^2 + en^2, & B = fl^2 + am^2 + dn^2, & C = el^2 + dm^2 + an^2, \\ D = (a-d)\,mn, & E = (a-e)\,nl, & F = (a-f)\,lm; \end{cases}$$

l'équation du troisième degré (92) en V^2 devient divisible par $\rho V^2 - P - a$ et peut être écrite, comme il est facile de le vérifier par un développement comparatif,

$$(98)\quad (\rho V^2 - P - a)\left\{\begin{array}{l} (\rho V^2 - P)^2 - [(e+f)l^2 + (f+d)m^2 + (d+e)n^2](\rho V^2 - P) + \\ \qquad + (ef\,l^2 + fd\,m^2 + de\,n^2)(l^2 + m^2 + n^2) \end{array}\right\} = 0,$$

dont le premier facteur, égalé à zéro, donne pour V la vitesse du son dans l'intérieur des solides élastiques, et, pour le milieu éthéré supposé constitué d'après les conditions (87), donne ces ondes à vibrations lon-

---

demy, vol. XXI, p. 40-41), représente le peu de légitimité et l'inconvénient de cette supposition $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$. Elle n'évite nullement d'avoir, en V^2, *une équation du troisième degré* affectée d'un facteur (*voyez* ci-après) $\rho V^2 - P$ qui fournit, si $P = 0$, une solution absurde $V = 0$, et, si P n'est pas nul, une onde sphérique à vibrations longitudinales, tout comme quand on n'efface pas a_{xxxx}, dont la conservation donne au moins à cette onde son vrai rayon.

gitudinales qui doivent s'y former, bien que notre œil ne les perçoive pas, de même que notre oreille n'est pas constituée pour percevoir les vibrations transversales excitées dans l'air; et dont le second facteur égalé à zéro donne, après une analyse connue, l'onde de Fresnel. (*Voyez* n° **21**.)

19. *Ces conditions, quand elles sont remplies quelle que soit la direction des ondes planes, reviennent à l'isotropie du milieu, et excluent la biréfringence.* — Cela est évident quand on admet entre les coefficients, outre les quinze égalités (5) qui les réduisent à vingt et un distincts, les *six égalités complémentaires* (8) telles que $a_{yyzz} = a_{yzyz}$, $a_{xxyz} = a_{zxxy}$ fournies par le calcul des forces moléculaires, car il en résulte que les six coefficients figurant dans la seconde ligne des quatorze conditions (87) sont tous nuls comme ceux de la troisième, et que, pour les autres, on a

$$(99)\quad a_{yzyz} = a_{zxzx} = a_{xyxy} = a_{yyzz} = a_{zzxx} = a_{xxyy} = \frac{1}{3}a_{xxxx} = \frac{1}{3}a_{yyyy} = \frac{1}{3}a_{zzzz},$$

rentrant bien dans les conditions d'isotropie (62), d'où, comme on a vu à la fin du n° **17**, deux ondes qui se réunissent en se propageant avec la vitesse $\sqrt{\frac{p+d}{\rho}}$, et le milieu est uniréfringent.

Mais vu la controverse dont ces égalités complémentaires (8) sont le sujet, examinons, au moyen de la formule de transformation (33) du n° **6**,

$$(100)\qquad a_{nsxy} = a_n a_s . a_{x'} a_{y'}, \quad \text{où} \quad a_i = a_x c_{ix} + a_y c_{iy} + a_z c_{iz},$$

en l'appliquant à un milieu élastique dont les vingt et un coefficients relatifs à certains axes x, y, z remplissent les quatorze conditions (87), quelles valeurs prennent les divers coefficients d'élasticité *relatifs à d'autres axes quelconques* x', y', z'.

1° Ces conditions (87) annulent les deux dernières lignes de l'expression (39) $a_{x'x'x'x'} = a_{xxxx} c_x^4 +$ etc., particularisation de l'expression (33) ou (100), et la réduisent à

$$(101)\qquad a_{x'x'x'x'} = a_{xxxx}(c_{xx'}^2 + c_{yx'}^2 + c_{zx'}^2)^2 = a_{xxxx}.$$

Donc, si les conditions Green (87) de constante transversalité des vibrations de deux ondes sont remplies dans un milieu, *son élasticité directe est la même en tous sens;* c'est-à-dire qu'*une égale dilatation* $\delta_{x'}$ *y produit, quelle que soit la direction* x', *une égale pression normale* $p_{x'x'}$ sur une face perpendiculaire à cette direction.

2° La même formule générale (33) ou (100), en y remplaçant n, s par x', x' et x', y' par x', y', donne

$$a_{x'x'x'y'} = (a_x c_{xx'} + a_y c_{yx'} + a_z c_{zx'})^2 . (a_x c_{xx'} + a_y c_{yx'} + a_z c_{zx'})(a_x c_{xy'} + a_y c_{yy'} + a_z c_{zy'}).$$

Développant, les conditions (87) annulent une partie des termes et réduisent l'expression à

$$(102)\quad a_{x'x'x'y'} \text{ ou } a_{x'y'x'x'} = a_{xxxx}(c_{xx'}^2 + c_{yx'}^2 + c_{zx'}^2)(c_{xx'} c_{xy'} + c_{yx'} c_{yy'} + c_{zx'} c_{zy'}) = 0.$$

Donc les coefficients tels que $a_{x'x'x'y'}$ sont tous nuls dans un pareil milieu. Ainsi, en tous sens, comme dans un milieu isotrope, *une dilatation* $\delta_{x'}$ *n'y produit aucune composante* $p_{x'y'}$. Et aussi, comme dans ce dernier milieu, *un glissement* $g_{x'y'}$ *n'engendre, sur une face perpendiculaire, soit à* x', *soit à* y', *qu'une force tangentielle*, sans aucune composante normale de pression.

3° Si l'on développe les deux expressions suivantes, tirées de la même formule générale (100),

$$a_{y'y'z'z'} = (a_x c_{xy'} + a_y c_{yy'} + a_z c_{zy'})^2 . (a_x c_{xz'} + a_y c_{yz'} + a_z c_{zz'})^2,$$
$$a_{y'z'y'z'} = [(a_x c_{xy'} + a_y c_{yy'} + a_z c_{zy'})(a_x c_{xz'} + a_y c_{yz'} + a_z c_{zz'})]^2,$$

et si, dans les développements, on fait $a_{xxxx} = a_{yyyy} = a_{zzzz}$, en remplaçant aussi, en vertu des relations (87), $2a_{yzyz}$ par $a_{xxxx} - a_{yyzz}$ et $2a_{zxxy}$ par $-a_{xxyz}$ et ainsi des autres, on obtient, en ayant égard aux relations connues entre les cosinus, notamment à

$$c_{yx'} c_{zy'} - c_{yy'} c_{zx'} = c_{xz'},$$

et autres semblables (où, dans les seconds membres, les indices x, y, z et x', y', z' répondent aux combinaisons yz, zx, xy et $y'z'$, $z'x'$, $x'y'$

de ceux des premiers membres), on obtient

$$(103)\quad \begin{cases} a_{y'y'z'z'} = a_{yyzz}c_{xx'}^2 + a_{zzxx}c_{yx'}^2 + a_{xxyy}c_{zx'}^2 \\ \qquad - 2a_{xxyz}c_{yx'}c_{zx'} - 2a_{yyzx}c_{zx'}c_{xx'} - 2a_{zzxy}c_{xx'}c_{yx'}, \\ a_{y'z'y'z'} = a_{yzyz}c_{xx'}^2 + a_{zxzx}c_{yx'}^2 + a_{xyxy}c_{zx'}^2 \\ \qquad + a_{xxyz}c_{yx'}c_{zx'} + a_{yyzx}c_{zx'}c_{xx'} + a_{zzxy}c_{xx'}c_{yx'}. \end{cases}$$

Ajoutant la première de ces équations à la seconde doublée, on a, encore en vertu des relations (87),

$$(104)\quad a_{y'y'z'z'} + 2a_{y'z'y'z'} = a_{yyyy} \text{ et par conséquent } = a_{y'y'y'y'} = a_{z'z'z'z'},$$

c'est-à-dire que pour toutes les directions rectangulaires entre elles il y a entre les trois espèces de coefficients $a_{y'y'y'y'}$, $a_{y'y'z'z'}$, $a_{y'z'y'z'}$, les mêmes relations, qui sont, comme l'on sait, précisément celles qui ont lieu pour l'isotropie.

4° On obtient de la même manière

$$(105)\qquad a_{x'x'y'z'} + 2a_{z'x'x'y'} = 0,$$

en sorte que ces coefficients, qui sont nuls dans un système isotrope pour tous les axes orthogonaux qu'on peut y tracer, le sont aussi dans le système élastique que nous considérons s'ils ont le même signe; et, en tous cas, ils ont des sommes (105) nulles.

5° Toutes les réciproques sont vraies. Les quatorze équations (87) ont lieu entre les coefficients d'élasticité d'un milieu, et pour toutes les directions x, y, z, et x', y', z' des axes coordonnés rectangulaires, si, seulement, l'on y a aussi pour toutes,

$$a_{x'x'x'x'} = a_{xxxx} \quad [*];$$

---

[*] On le prouve en écrivant cette équation $a_{x'x'x'x'} - a_{xxxx}(c_{xx'}^2 + c_{yx'}^2 + c_{zx'}^2)^2 = 0$, substituant à $a_{x'x'x'x'}$ sa valeur (39) et plaçant x' d'abord dans le plan xy; car, alors, l'équation réduite et *divisée par* $c_{xx'}c_{yx'}$ donne $a_{xxxy} = 0$, $a_{yyyx} = 0$ quand on y fait successivement $c_{xx'} = 1$ et $c_{xx'} = 0$; la même équation donne, par suite, $2a_{xyxy} + a_{xxyy} - a_{xxxx} = 0$, ce qui permet d'effacer, dans l'équation particularisée, tout excepté la troisième ligne de l'expression (39), susceptible alors d'être divisée par $c_{xx'}c_{yx'}c_{zx'}$, et qui donne alors $a_{xxyz} + 2a_{zxxy} = 0$ en faisant $c_{xx'} = 1$.

ou si l'on y a

$$a_{x'x'x'y'} = 0 \quad [*],$$

ou bien si l'on y a

$$a_{x'x'y'z'} + 2\,a_{z'x'x'y'} = 0 \quad [**],$$

ou encore si l'on y a, toujours pour toutes les directions x', y', z',

$$a_{x'x'x'x'} - a_{x'x'y'y'} - 2a_{x'y'x'y'} = 0 \quad [***];$$

en sorte que l'une quelconque des quatre espèces de conditions (87), si elle est remplie en tous sens, entraîne toutes les autres [****].

Il en résulte que l'exacte *transversalité* des mouvements moléculaires,

---

[*] En effet, en plaçant x', y' dans le plan xy, l'équation $a_{x'x'x'y'} = 0$, en composant son premier membre avec la formule (100) ou (33), se réduit à

$$-a_{xxxx}c^3_{xx'}c_{yx'} + a_{yyyy}c^3_{yx'}c_{xx'} + (2a_{xyxy} + a_{xxyy})(c^3_{xx'}c_{yx'} - c^3_{yx'}c_{xx'}) = 0$$

qui, divisée par $c_{yx'}$, donne, en faisant ensuite $c_{yx'} = 0$, $c_{xx'} = 1$,

$$a_{xxxx} = 2a_{xyxy} + a_{xxyy}, \text{ d'où } a_{xxxx} = a_{yyyy} \text{ et de même } = a_{zzzz};$$

ce qui réduit l'équation $a_{x'x'x'y'} = 0$ aux termes affectés des trois binômes tels que $a_{xxyz} + 2\,a_{zxxy}$, et la nullité de celui-ci se prouve en faisant les angles (x, x'), (y, y'), (z, z') infiniment petits.

[**] Car, en développant cette équation et plaçant x', y' dans le plan xy, elle se réduit, en divisant par $c_{xx'}c_{yx'}$, à

$$a_{yyyz}c_{yx'} - a_{xxxz}c_{xx'} + 2\,a_{yyyz}c_{yx'} - 2\,a_{xxxz}c_{xx'} = 0,$$

qui, particularisée, conduit à l'annulation de tous les coefficients qui y sont compris; d'où toutes les autres équations de condition (87).

[***] Car il en résulte, en mettant toujours x', y' dans le plan xy, et effaçant tous les termes affectés d'un trinôme semblable à celui qu'on suppose nul pour toutes les directions, ce qui entraîne $a_{xxxx} = a_{yyyy} = a_{zzzz}$, il en résulte, dis-je,

$$a_{xxxy}(6c^2_{yx'} - 10c^2_{xx'}) + a_{yyyx}(6c^2_{xx'} - 10c^2_{yx'}) = 0;$$

d'où, en faisant successivement nuls $c_{xx'}$ et $c_{yx'}$, deux équations qui, combinées, donnent $a_{xxxy} = 0$ et $a_{yyyx} = 0$: or cela emporte les autres conditions (87).

[****] Les formules (105) montrent aussi que si les élasticités latérales telles que a_{yyzz}, ou bien les élasticités tangentielles a_{yzyz}, sont égales pour trois directions rectan-

ou leur parallélisme à des ondes de toutes les directions dans un milieu transparent, exige une foule de conditions qu'on ne voit remplies que dans les corps isotropes. On remarque, surtout, que non-seulement *une dilatation* $\delta_{x'}$ *ne produit qu'une pression exactement normale* $p_{x'x'}$, ou aucune composante tangentielle de pression sur une face qui est perpendiculaire à sa direction ($a_{x'y'x'x'} = 0$, $a_{x'z'x'x'} = 0$) et, aussi, qu'*un glissement sur une face n'y engendre jamais que des composantes tangentielles* ($a_{x'x'x'y'} = 0$), mais encore qu'*en tout sens*, ou quelle que soit la direction x' dans ce milieu, *une égale dilatation* $\delta_{x'}$ *y produit une pression d'égale intensité* $p_{x'x'}$ ($a_{x'x'x'x'}$ constant).

Or une pareille égalité est contraire à toutes les idées qu'on peut se former, d'après les faits, des corps doués de la double réfraction. Ils sont cristallisés sous des formes polyédriques non régulières et variées; ils offrent des clivages suivant certaines directions; ils sont, en un mot, d'une contexture essentiellement inégale dans les divers sens, et qui doit, tout porte à le faire présumer, rendre inégaux les rapports $\frac{p_{x'x'}}{\delta_{x'}} = a_{x'x'x'x'}$ des pressions p dans l'éther dont ils sont imprégnés, aux petites dilatations δ qui les engendrent, et rendre les pressions obliques aux dilatations, excepté pour certains sens principaux.

Cette présomption est changée en certitude, si l'on considère la biréfringence artificiellement produite *par une compression* donnée dans un seul sens, ou inégalement dans plusieurs, à un corps amorphe primitivement isotrope et uniréfringent, tel que le verre. On a en effet calculé, au n° **16**, l'inégalité des coefficients a_{xxxx}, a_{yyyy} due à l'inégalité des rapprochements moléculaires dans les sens x et y. Ce calcul était fondé, il est vrai, sur les expressions (12) assignées aux deux coefficients par l'analyse des actions s'exerçant entre les points matériels suivant leurs lignes de jonction deux à deux, et proportionnellement à une fonction de leur distance. Mais quelque motif qu'on puisse s'alléguer de révoquer en doute cette grande loi qui ne préjuge pourtant rien quant à la forme de la fonction, et quelque chose qu'on puisse concevoir à sa place, il est impossible de ne point convenir que l'iné-

---

gulaires, et, s'il en est de même des élasticités asymétriques telles que a_{xxyz} ou bien a_{zxzy}, les premières sont égales aussi pour toutes les directions possibles x', y', z'.

gal rapprochement moléculaire en divers sens doit influer sur la grandeur des *élasticités directes* $a_{xx\,xx} = \frac{p_{xx}}{\delta_x}$ comme elle influe, bien certainement, sur celle des autres élasticités, dites *latérales*, $a_{xxyy} = \frac{p_{xx}}{\delta_y}$, ou tangentielles, $a_{xy\,xy} = \frac{p_{xy}}{g_{xy}}$, etc., puisque, sans les inégalités au moins de celles-ci en divers sens, les formules ne donneraient pas de double réfraction. Un milieu ne peut être élastique et vibrant si ses parties n'agissent pas les unes sur les autres, et, quel que soit le mode de leur action, il n'est pas possible d'imaginer qu'elles engendrent des élasticités directes parfaitement égales, lorsqu'il y a une inégalité de contexture qui rend inégales les élasticités latérales ou tangentielles.

La double réfraction est, par tous ces motifs, incompatible avec les quartorze conditions (87) de l'exacte *transversalité* des mouvements moléculaires du fluide éthéré, ou de leur constant et rigoureux parallélisme aux plans des ondes qui s'y propagent sans altération, pour toutes les directions que ces plans peuvent affecter dans un milieu transparent. Ces conditions ne font, au demeurant, qu'exprimer l'*isotropie* de tout milieu où elles sont remplies, et par conséquent son uniréfringence.

20. *Sur la manière de présenter rigoureusement la théorie de la lumière.* — Puisqu'il faut renoncer à regarder, avec Green, comme possible l'exact parallélisme des vibrations lumineuses aux ondes planes qui se propagent dans l'intérieur d'un corps doué de la double réfraction, comment expliquer la conformité de toute une série de phénomènes avec les lois que le génie de Fresnel lui a révélées, et qu'il a reliées par une théorie construite en admettant à priori ce parallélisme jusque dans les cristaux, quoique l'expérience ne le montre que dans l'air; et comment déduire ces mêmes lois de l'analyse plus rationnelle qui vient d'être exposée ?

L'objet de notre travail ne nous impose point de répondre à cette question, si importante pour les physiciens. Il devrait nous suffire d'ajouter que quand bien même une réponse complète se ferait longtemps attendre, ce ne serait pas une raison de s'arrêter à une théorie reconnue défectueuse dès son apparition, et encore moins de faire flé-

chir illogiquement, pour s'en rapprocher, une analyse plus juste dans ses bases, telle que celle qui se fonde sur les équations de l'élasticité. Et si, au lieu de l'onde de Fresnel, cette analyse exacte ne pouvait fournir qu'une surface plus compliquée, dont on ne sût représenter par une équation qu'une polaire réciproque (*voyez* le numéro suivant), ce serait sur cette dernière qu'il conviendrait d'étudier la marche des ondes planes et des rayons réfractés, en en faisant ensuite voir l'accord seulement approché avec ce qu'a déterminé Fresnel.

Mais quelque chose de plus simple est possible, et est même tout trouvé. Les conditions Green et la supposition de rigoureuse *transversalité* qu'elles énoncent ne sont nullement nécessaires pour obtenir, même exactement, *la surface d'onde de Fresnel,* qui résume en quelque sorte la partie la mieux confirmée de ses immortelles découvertes. On obtient cette surface en posant des conditions moins nombreuses, plus générales, exprimant des relations qui n'ont rien que de plausible et de conforme même à ce que fournissent très-approximativement d'autres considérations, et qui, loin d'entraîner l'isotropie, laissent subsister, à tel degré qu'on veut, l'inégalité si probable et on peut dire certaine des élasticités directes dans deux ou trois sens principaux; en un mot, *en revenant aux résultats des premières recherches de Cauchy,* présentées en 1830, sauf à en changer un peu la forme et à y ajouter quelques développements, et ensuite à emprunter à ses travaux ultérieurs et à ceux de ses émules ce qui est relatif au calcul des *quantités* de lumière réfléchies et réfractées, ainsi qu'à l'explication, peut-être à compléter, des phénomènes de dispersion et autres dont le Mémoire fondamental de 1830 ne s'occupait pas encore.

Si les travaux de Cauchy, souvent cités, mais pas assez étudiés, et qui n'ont jamais eu de réfutation quoiqu'il en ait lui-même provoqué la critique [*], n'ont point passé dans l'enseignement, ce n'est pas surtout, nous le pensons, en raison de leur forme analytique, dont on serait peut-être parvenu à les dégager, ni à cause de ce *troisième rayon* à vibrations longitudinales ou presque longitudinales invisibles, dont l'existence est indirectement manifestée dans plusieurs phénomènes [**], et que les physiciens commencent à ne plus éluder. C'est, plus proba-

[*] *Comptes rendus,* 24 juillet 1848, t. XXVII, p. 94.

[**] *Comptes rendus,* 18 décembre, p. 622; et aussi les Mémoires cités de Green.

blement, à cause de la forme d'apparence compliquée et bizarre de ces quatre relations que Cauchy impose entre les coefficients d'élasticité comme condition pour arriver aux résultats de Fresnel.

Mais si nous prouvons que ces relations (n° **23** ci après), dont celles de Green ne sont qu'un cas très-particulier, ne diffèrent pas sensiblement de celles (57) de la distribution ellipsoïdale des élasticités, du n° **13**, distribution si naturelle et qui doit appartenir sensiblement (n° **16**) aux corps ou aux milieux dont l'isotropie a été altérée par des condensations inégales en divers sens; qu'ainsi elles doivent exister d'une manière ou exacte ou extrêmement approchée dans l'éther à l'état où il se trouve entre les molécules des corps transparents biréfringents, alors le lien entre la théorie de Fresnel et la théorie rationnelle, instaurée par Cauchy, aura été trouvé, et rien ne s'opposera plus à ce qu'on s'appuie généralement sur cette dernière, susceptible, au reste, comme on va voir, d'être présentée sans invoquer explicitement la loi controversée des actions moléculaires, et sans admettre par conséquent, entre les coefficients, les égalités complémentaires (8) dont un certain nombre de géomètres refusent de reconnaître la réalité.

21. *Suite. Équation de la surface polaire réciproque de celle d'onde courbe.* — Remarquons d'abord que si, lorsque les vingt et un coefficients d'élasticité sont absolument quelconques, l'équation de la surface d'onde courbe, touchée à un instant donné par toutes les ondes planes qui passaient par son centre à un instant antérieur, est impossible à établir, il n'en est pas de même d'une autre surface courbe, considérée par Cauchy dès 1830, et sur laquelle on peut étudier aussi, comme on a dit tout à l'heure, la propagation de la lumière et les circonstances de sa réfraction.

C'est la surface appelée, dans des Mémoires ultérieurs, *caractéristique* par le même Cauchy, surface *des lenteurs d'onde* (*wave-slowness*) par sir W. Hamilton, et surface de réfraction ou plutôt *surface-index* ou *des indices* (parce que ses rayons vecteurs, inverses des vitesses, donnent par cela seul les indices de réfraction) par M. Mac-Cullagh [*], qui a reconnu qu'elle n'était autre chose que la *réciproque* (polaire

[*] *On the Laws of crystalline Reflexion and Refraction* (*Transactions of Irish Society*, vol. XVIII, p. 38).

réciproque par rapport à une sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) de la surface d'onde courbe.

L'équation de cette surface réciproque est, *en coordonnées polaires* ou sphériques, simplement l'équation (92) du troisième degré en V^2, en y regardant $\frac{1}{V}$ comme représentant la longueur de son rayon vecteur, et l, m, n (qui entrent au second degré dans les sextinômes P, A, B,..., F) comme les cosinus des angles de ce rayon avec trois axes rectangulaires; d'où résulte qu'en divisant tous les termes par $\rho^3 V^6$ et en appelant

$$\left\{\begin{array}{lcccccccc} & P', & A', & B', & C', & D', & E', & F', \\ \text{ce que deviennent} & P, & A, & B, & C, & D, & E, & F, \end{array}\right.$$

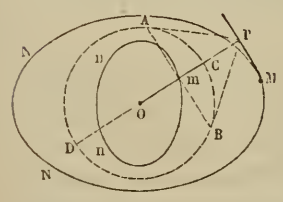
lorsqu'on y divise tous les coefficients a par la densité ρ et qu'on y remplace l, m, n par x, y, z, l'équation de cette surface du sixième degré en coordonnées ordinaires est

$$(106)\qquad \left\{\begin{array}{l} (A' + P' - 1)(B' + P' - 1)(C' + P' - 1) - \\ - D'^2(A' + P' - 1)y^2z^2 - E'^2(B' + P' - 1)z^2x^2 - \\ - F'^2(C' + P' - 1)x^2y^2 + 2D'E'F'x^2y^2z^2 = 0. \end{array}\right.$$

En effet, les rayons vecteurs de cette surface ayant des grandeurs $\frac{1}{V}$, sont les inverses des perpendiculaires de même direction (l, m, n) abaissées du centre sur les plans tangents à la surface inconnue de l'onde courbe, puisque ces perpendiculaires ont pour longueurs les espaces V parcourus au bout de l'unité de temps par les ondes planes correspondantes. Or, c'est bien la propriété caractéristique d'une surface polaire réciproque de celle-ci par rapport à une sphère de rayon $= 1$[*]. L'onde

---

[*] Rappelons en effet que si DACB, NNM, nnm sont les coupes, par un même plan mené du centre commun O, de la sphère, d'une nappe de la surface d'onde, et de la nappe correspondante de la surface (106) qui a ses rayons vecteurs Om inverses des perpendiculaires OP = V de même direction, abaissées de O sur les plans tangents MP à l'onde, le point m se trouvera à l'intersection de OP avec la ligne de jonction AB des points de contact des deux tangentes menées de P au grand cercle de coupe de la sphère, dont le rayon est supposé égal à l'unité; car



courbe est, réciproquement, polaire de cette surface (106), en sorte que leurs particularités sont symétriques [*], et l'on peut, quels que soient les vingt et un (ou quinze) coefficients d'élasticité a_{xxxx}, etc., ainsi que les composantes p^0_{xx} des pressions antérieures aux ébranlements, étudier sur la surface (106) les diverses circonstances de la propagation des ondes planes et de la marche des rayons qu'engendrent leurs intersections mutuelles.

22. *Suite. Décomposition possible de cette surface, et de celle de l'onde elle-même, en un ellipsoïde et une surface du quatrième degré.* — Poursuivons l'emprunt fait à l'analyse de Cauchy, mais en la modifiant et en nous abstenant, comme nous avons dit, de supposer entre les coefficients les égalités complémentaires controversées (8) qui résultent de ses calculs, et en maintenant par conséquent, pour une contexture à trois plans de symétrie, la seule qui soit à considérer pour l'éther, neuf coefficients indépendants que nous désignerons, comme au n° **12**, par (48)

$$(107)\quad \left\{\begin{array}{lll} a = a_{xxxx}, & b = a_{yyyy}, & c = a_{zzzz}, \\ d = a_{yzyz}, & e = a_{zxzx}, & f = a_{xyxy}, \\ d' = a_{yyzz}, & e' = a_{zzxx}, & f' = a_{xxyy}. \end{array}\right.$$

L'équation du troisième degré (92) en V^2, qui est pour ce cas

$$(108)\quad \left\{\begin{array}{l} (al^2 + fm^2 + en^2 + P - \rho V^2)(fl^2 + bm^2 + dn^2 + P - \rho V^2)\times \\ \qquad\qquad \times(el^2 + dm^2 + cn^2 + P - \rho V^2) - \\ -(d + d')^2(al^2 + fm^2 + en^2 + P - \rho V^2)m^2n^2 - \\ -(e + e')^2(fl^2 + bm^2 + dn^2 + P - \rho V^2)n^2l^2 - \\ -(f + f')^2(el^2 + dm^2 + cn^2 + P - \rho V_2)l^2m^2 + \\ +2(d + d')(e + e')(f + f')l^2m^2n^2 = 0, \end{array}\right.$$

$\overline{OA}^2 = 1 = Om \times OP$ prouve que Am est perpendiculaire à OP; m est donc bien le pôle du plan PM par rapport à cette sphère.

[*] Cette propriété paraît n'avoir rien de commun avec celle que possède l'onde de Fresnel ou la surface (120) ci-après, d'être sa propre polaire réciproque par rapport *à un ellipsoïde* $\frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ca} + \frac{z^2}{ab} = 1$ (18e *Leçon sur l'Élasticité*, de M. Lamé).

peut être écrite, en changeant les signes, sous la forme suivante (109), comme il est facile de le vérifier par un développement comparatif du premier terme de l'équation (108) et de la partie de l'équation (109) étrangère à ses quatre derniers termes; et, cela, en laissant l, m, n quelconques ou sans avoir besoin de les supposer liés par $l^2 + m^2 + n^2 = 1$:

$$(109)\quad \left\{\begin{aligned}
&(\rho V^2 - P - a l^2 - b m^2 - c n^2)\left\{\begin{aligned}&(\rho V^2 - P)^2 - [(e+f)l^2 + (f+d)m^2 + (d+e)n^2](\rho V^2 - P) + \\ &\quad + (ef l^2 + fd m^2 + de n^2)(l^2 + m^2 + n^2)\end{aligned}\right\} \\
&\quad - [(b-d)(c-d) - (d+d')^2](a l^2 + f m^2 + e n^2 + P - \rho V^2) m^2 n^2 \\
&\quad - [(c-e)(a-e) - (e+e')^2](f l^2 + b m^2 + d n^2 + P - \rho V^2) n^2 l^2 \\
&\quad - [(a-f)(b-f) - (f+f')^2](e l^2 + d m^2 + c n^2 + P - \rho V^2) l^2 m^2 \\
&\quad + [(a-e)(b-f)c-d) + (a-f)(b-d)(c-e) - 2(d+d')(e+e')(f+f')] l^2 m^2 n^2 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Elle donne immédiatement les trois systèmes suivants de valeurs des carrés des vitesses de propagation pour des plans d'onde perpendiculaires aux coordonnées :

$$(110)\quad \left\{\begin{aligned}
&V^2 = \frac{a+P}{\rho},\ \frac{e+P}{\rho},\ \frac{f+P}{\rho} \text{ pour } l = 1,\ m = 0,\ n = 0 \text{ (ondes perp. aux } x), \\
&V^2 = \frac{b+P}{\rho},\ \frac{f+P}{\rho},\ \frac{d+P}{\rho} \text{ pour } l = 0,\ m = 1,\ n = 0 \text{ (ondes perp. aux } y), \\
&V^2 = \frac{c+P}{\rho},\ \frac{d+P}{\rho},\ \frac{e+P}{\rho} \text{ pour } l = 0,\ m = 0,\ n = 1 \text{ (ondes perp. aux } z).
\end{aligned}\right.$$

Comme elle représente la surface réciproque de celle d'onde quand $\frac{1}{V}$ est le rayon vecteur et l, m, n sont les cosinus de ses angles avec trois axes fixes, surface représentée aussi en coordonnées ordinaires par la même équation lorsqu'on y remplace

$$V^2 \text{ par } 1, \quad \text{et} \quad l,\ m,\ n \text{ par } x,\ y,\ z,$$

la coupe de cette surface réciproque par le plan des yz, pour lequel

$$l = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0,$$

sera, quand il y aura entre les coefficients b, c, d, d' la relation

$$(b-d)(c-d) = (d+d')^2,$$

représentée par la première ligne de l'équation (109) égalée à zéro, ou

par l'équation

$$(111)\quad (\rho V^2 - P - b m^2 - c n^2)(\rho V^2 - P - f m^2 - e n^2)[\rho V^2 - P - d(m^2 + n^2)] = 0.$$

Cette coupe se composera par conséquent de *trois ellipses* (et même deux ellipses et un cercle si la pression primitive $P = p^0_{xx} l^2 + p^0_{yy} m^2 + p^0_{zz} n^2$ est égale dans tous les sens également inclinés sur les x, ou si $p^0_{yy} = p^0_{zz}$).

Comme les coupes diamétrales principales d'une pareille surface et de sa polaire réciproque sont elles-mêmes polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à un cercle concentrique de rayon $= 1$, la coupe de la *surface d'onde* par le plan yz se composera également d'une ellipse pour la nappe donnant dans les sens y et z des vitesses de propagation de vibrations longitudinales produites par les élasticités directes b, c, et, pour les deux autres nappes, donnant, dans les mêmes sens, des vitesses de propagation de vibrations transversales dues aux élasticités tangentielles d, e, f, une ellipse et un cercle (toujours si P ne dépend que de l) comme la surface de Fresnel.

Deux autres conditions ou relations analogues donneront des coupes elliptiques ou circulaires par les plans zx et xy.

Si toutes trois sont remplies et si, en outre, le dernier terme de l'équation (109) s'annule, c'est-à-dire si l'on a à la fois

$$(112)\quad \left\{ \begin{array}{l} (b - d)(c - d) = (d + d')^2, \quad (c - e)(a - e) = (e + e')^2, \\ \qquad\qquad (a - f)(b - f) = (f + f')^2, \end{array} \right.$$

$$(113)\quad \left\{ \begin{array}{l} (a - e)(b - f)(c - d) + (a - f)(b - d)(c - e) = \\ \quad = 2(d + d')(e + e')(f + f'), \end{array} \right.$$

l'équation (109) de la surface réciproque de l'onde se réduit à la première ligne. Cette surface se compose en conséquence

$$(114)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{D'un ellipsoïde} \ \ldots\ldots\ldots & P + a l^2 + b m^2 + c n^2 = \rho V^2, \\ \text{et d'une surface} & (\rho V^2 - P)^2 - [(e + f) l^2 + (f + d) m^2 + (d + e) n^2](\rho V^2 - P) + \\ \text{du quatrième degré} & \quad + (ef l^2 + fd m^2 + de n^2)(l^2 + m^2 + n^2) = 0, \end{array} \right.$$

dont les équations, toujours en coordonnées polaires, si la pression primitive $P = p^0_{xx} l^2 + p^0_{yy} m^2 + \ldots$ est constante $= p^0_{xx} = p^0_{yy} = p^0_{zz}$, c'est-à-dire si elle est indépendante de l, m, n, ou égale en tous sens, peuvent, en représentant ainsi les carrés des vitesses de propagation

principales

$$(115)\quad \begin{cases} \dfrac{a+P}{\rho} = A^2, & \dfrac{b+P}{\rho} = B^2, & \dfrac{c+P}{\rho} = C^2, \\ \dfrac{d+P}{\rho} = a^2, & \dfrac{e+P}{\rho} = b^2, & \dfrac{f+P}{\rho} = c^2, \end{cases}$$

être écrites, comme il est facile de le vérifier pour la seconde en la développant,

$$(116)\quad \begin{cases} A^2 l^2 + B^2 m^2 + C^2 n^2 = V^2, \\ V^4 - [(b^2+c^2)l^2 + (c^2+a^2)m^2 + (a^2+b^2)n^2]V^2 + \\ + (b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2)(l^2+m^2+n^2) = 0; \end{cases}$$

ce qui donne, en coordonnées rectangles, en divisant par V^2 et V^4, et mettant x, y, z pour les trois projections orthogonales $\frac{1}{V}l$, $\frac{1}{V}m$, $\frac{1}{V}n$ du rayon vecteur $\frac{1}{V}$:

$$(117)\quad A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = 1,$$

$$(118)\quad \begin{cases} (x^2+y^2+z^2)(b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2) - \\ - (b^2+c^2)x^2 - (c^2+a^2)y^2 - (a^2+b^2)z^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

La surface d'onde, polaire réciproque de la double surface (117), (118) se composera de même d'un ellipsoïde et d'une surface du quatrième degré dont les équations s'obtiendront en mettant

$$\frac{1}{A},\ \frac{1}{B},\ \frac{1}{C},\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c} \quad \text{à la place de} \quad A,\ B,\ C,\ a,\ b,\ c,$$

car on a reconnu que la surface du quatrième degré (118) partageait avec toute surface du second degré pourvue de centre la propriété de fournir sa polaire réciproque par rapport à une sphère concentrique de rayon 1 lorsqu'on change, dans son équation, les trois paramètres en leurs inverses [*]. Il en résultera, pour l'onde,

$$(119)\quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1, \quad \text{avec}$$

$$(120)\quad \begin{cases} (x^2+y^2+z^2)(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - \\ -(b^2+c^2)a^2x^2 - (c^2+a^2)b^2y^2 - (a^2+b^2)c^2z^2 + a^2b^2c^2 = 0. \end{cases}$$

---

[*] On connaît l'ingénieuse démonstration, en partie synthétique, mais encore com-

On a ainsi, lorsque les relations (112), (113) de Cauchy existent entre les neuf coefficients d'élasticité du milieu, pour l'onde courbe, un *ellipsoïde* (119) et la surface d'onde (120) de Fresnel.

23. *Examen des conditions trouvées par Cauchy pour que l'équation de l'onde courbe se décompose en deux autres dont l'une donne la surface de Fresnel.* — Observons d'abord que ces quatre conditions (112), (113) comprennent comme cas particulier les conditions (87) de Green; car celles-ci, pour un milieu à trois plans de symétrie, se

---

pliquée, qu'a donnée M. Mac-Cullagh (Mémoire cité, p. 33) de cette remarquable dépendance réciproque de la surface (118) et de la surface (120) de Fresnel, démonstration qui a été encore plus dégagée de calcul par M. Plucker (*Journal de Crelle*, t. XIX, 1839, p. 91). La démonstration analytique la plus simple que nous en connaissions est celle que Cauchy a donnée, non pas au Mémoire de 1830, où il se borne au seul cas de différences très-petites entre les trois paramètres a, b, c, mais au § III d'un *Mémoire sur la polarisation rectiligne et la double réfraction*, du 20 mai 1839, inséré au tome XVIII (1842) des *Mémoires de l'Institut*.

Nous avons présenté, au reste (*Comptes rendus*, 17 août 1863, t. LVII, p. 387), des observations sur le § Ier de ce même Mémoire, où Cauchy, pour montrer que son analyse s'adaptait à diverses opinions, a cru pouvoir faire aux partisans de la perpendicularité des vibrations aux plans de polarisation, jusque-là combattue par lui, une concession qui nous paraît impossible, car elle consiste à prendre, pour établir l'équation (118),

$$\frac{p^0_{zz}+\mathrm{e}}{\rho}=\frac{p^0_{yy}+\mathrm{f}}{\rho}=a^2,\quad \frac{p^0_{xx}+\mathrm{f}}{\rho}=\frac{p^0_{zz}+\mathrm{d}}{\rho}=b^2,\quad \frac{p^0_{yy}+\mathrm{d}}{\rho}=\frac{p^0_{xx}+\mathrm{e}}{\rho}=c^2,$$

ce qui exigerait entre les coefficients d'élasticité tangentielle $\mathrm{d}=\mathrm{a}_{yzyz}$, $\mathrm{e}=\mathrm{a}_{zxzx}$, $\mathrm{f}=\mathrm{a}_{xyxy}$ dans les trois sens, et les trois composantes p^0 des pressions qui sont antérieures aux vibrations, ou qui ont lieu à l'intérieur d'un cristal dans l'état de repos, les relations singulières suivantes

$$\mathrm{e}-\mathrm{f}=p^0_{yy}-p^0_{zz},\quad \mathrm{f}-\mathrm{d}=p^0_{zz}-p^0_{xx},\quad \mathrm{d}-\mathrm{e}=p^0_{xx}-p^0_{yy}$$

qu'on peut hardiment regarder comme ne pouvant pas exister; car les pressions de l'éther dans l'état naturel à l'intérieur d'un cristal doivent se régler d'après les pressions de l'éther qui l'environne, et, si elles offrent en divers sens quelques différences, elles ne peuvent être constamment égales à celles des coefficients d'élasticité dans ces mêmes sens.

réduisent aux cinq suivantes

$$(121) \qquad a = b = c = 2d + d' = 2e + e' = 2f + f',$$

qui, introduites dans les quatre équations Cauchy (112), (113), y satisfont identiquement. Il suffit même de faire $b = c$ dans la première pour que cela entraîne $b = 2d + d'$, et réciproquement.

Quelle que soit la signification intrinsèque de ces conditions ou relations, il vaut évidemment mieux les admettre entre les coefficients que les conditions ou relations Green (87) pour obtenir l'onde de Fresnel, supposée fournie par l'expérience, car elles sont, comme on a dit, moins nombreuses, plus générales, compatibles, non-seulement avec les égalités $d = d'$, $e = e'$, $f = f'$ que fournit le calcul des forces moléculaires, et aussi avec tout autre rapport que l'égalité entre d' et d, e' et e, f' et f si on le croit possible, mais aussi avec des rapports mutuels quelconques entre les grandeurs a, b, c des trois élasticités directes principales; en sorte qu'elles n'entraînent pas, comme les conditions Green, l'égale élasticité en tous sens, d'où (n° **19**) l'impossibilité de la double réfraction ou de toute surface d'onde autre que la sphère.

Mais examinons ce que sont en elles-mêmes ces conditions (112), (113) de Cauchy.

Nous avons vu (n° **13**) que lorsqu'on a les suivantes (57)

$$(122) \qquad 2d + d' = \sqrt{bc}, \quad 2e + e' = \sqrt{ca}, \quad 2f + f' = \sqrt{ab},$$

les élasticités directes se distribuent autour de chaque point suivant une loi *ellipsoïdale* simple et entraînant des propriétés particulières et remarquables, et que ce mode de distribution est, ou exactement ou à cela près de quantités du second ordre qui sont négligeables quand les élasticités a, b, c ne diffèrent pas trop considérablement entre elles, le mode qui doit avoir lieu dans les corps primitivement isotropes dont on a rapproché inégalement les molécules en divers sens par des compressions permanentes, ou par la trempe, l'étirage, etc., c'est-à-dire généralement dans les corps amorphes ou à cristallisation confuse.

Or, tous les physiciens admettent que cet état moléculaire est celui où se trouve l'éther dans l'intérieur des divers corps transparents

biréfringents. En effet, 1° un cristal dont la forme primitive est un cube ou tout autre polyèdre régulier ne produit pas la double réfraction, en sorte que l'éther contenu doit y être isotrope comme dans l'air; 2° si l'une des coupes du cristal est un polygone régulier, tout s'y passe de la même manière autour des perpendiculaires à cette coupe, et le cristal est *à un axe;* 3° enfin, quelque grande que soit la variété des autres formes cristallines, elles n'offrent qu'une seule deuxième espèce de biréfringence, dite *à deux axes*, comme celle que présente le verre comprimé inégalement dans deux sens.

Comparons donc l'une des relations (112), la première par exemple, avec la première (122) qui contient les mêmes lettres. Si nous faisons, comme au n° **15**,

$$\frac{d}{d'} = i,$$

rapport qui est $=1$ quand on admet les résultats du calcul des actions moléculaires, et si nous appelons d_1, d_2 les valeurs de d tirées de l'équation (112) $(b-d)(c-d)=(d+d')^2$, et de l'équation (122) $2d+d'=\sqrt{bc}$, nous avons

$$(123)\qquad d_1 = \frac{-(b+c)+\sqrt{4bc(1+i)^2+(b-c)^2}}{2i(2+i)},\quad d_2 = \frac{\sqrt{bc}}{2+i},$$

d'où l'on déduit facilement que le rapport de d_1 à d_2, développé suivant les puissances de $\frac{b-c}{c}$, est

$$1 - \frac{1}{8(1+i)}\left(\frac{b-c}{c}\right)^2 + \frac{1}{8(1+i)}\left(\frac{b-c}{c}\right)^3 - \ldots,$$

ou ne diffère de 1 que d'une petite fraction du carré de $\frac{b-c}{c}$. Mais on tire directement des expressions (123)

que pour			$b=1,1\,c$,	$b=1,25\,c$,	$b=1,50\,c$,
en faisant	$i=1$	l'on a	$\frac{d_1}{d_2}=0,99943$,	$0,99689$,	$0,98777$,
	$i=2$		$0,99788$,	$0,99586$,	$0,98641$,
	$i=\frac{1}{2}$		$0,99962$,	$0,99793$,	$0,99316$.

D'où il suit que quelque valeur qu'on veuille attribuer au rapport $i = \frac{d'}{d}$, et pour des différences même très-notables entre les élasticités directes a, b, c du milieu dans les trois sens principaux, il y a presque *égalité* entre les deux valeurs, telles que d_1 et d_2, tirées des conditions (112) Cauchy et (122) de distribution ellipsoïdale, pour chacune des trois élasticités tangentielles, telles que d, dont les racines carrées sont proportionnelles aux vitesses de la lumière dans les trois mêmes sens [*].

Et on peut même voir que les valeurs (79) que nous avons trouvées au n° **16** pour $a_{xxxx} = a$, $a_{yyyy} = b$, $a_{xyxy} = f$ en fonction de trois augmentations permanentes ∂, ∂', ∂'' des distances moléculaires en trois sens, satisfont tout aussi bien (pour $i = 1$) à l'équation (112) $(a - f)(b - f) = 4f^2$ qu'à l'équation (122) $3f = \sqrt{ab}$; car la substitution prouve que le premier membre de (112) ne diffère du second que de

$$-\frac{1}{3}\left[\frac{(1+\partial)^2-(1+\partial')^2}{1+\partial''}\right]^2 a_4^2,$$

qui est de l'ordre des quantités négligées au n° **16**.

Quant à la quatrième condition Cauchy, ou à la relation (113), elle est, avec une grande approximation, une conséquence des trois (112); car, lorsque celles-ci sont remplies, on déduit de leur multiplication l'une par l'autre que le produit des deux termes

$$(a - e)(b - f)(c - d), \quad (a - f)(b - d)(c - e)$$

du premier membre de l'équation (113) est égal au quart du carré du

---

[*] Nous avons vu au n° 13 que si l'on a $2d + d' = \frac{b+c}{2}$, il en résulte une autre espèce de distribution ellipsoïdale, mais ne donnant pas l'*intégrabilité* reconnue au n° 15. On en tirerait $d = \frac{b+c}{2(2+i)}$. En appelant d_3 cette valeur de d, on trouverait, pour $i = 1$, en supposant successivement $b = 1{,}1c$, $1{,}25c$, $1{,}5c$, le rapport $\frac{d_1}{d_3} = 0{,}99954$, $0{,}99072$, $0{,}96977$. Elles sont, quand b excède $1{,}1c$, moins approchées de l'unité que les rapports de d_1 à d_2 tirés de $2d + d' = \sqrt{bc}$.

second membre, d'où il suit que ces deux termes sont égaux entre eux et à $(d+d')(e+e')(f+f')$. Or, si dans l'égalité qui en résulte

$$(124)\qquad (a-e)(b-f)(c-d)-(d+d')(e+e')(f+f')=0$$

on fait, comme tout à l'heure, $\frac{d'}{d}$, et aussi $\frac{e'}{e}$ et $\frac{f'}{f}=i$, et l'on remplace d, e, f par leurs valeurs, telles que celle (123) de d_1, tirées des trois équations (112), valeurs qui, si l'on pose

$$(125)\qquad \frac{b-c}{c}=\varepsilon,\quad \frac{c-a}{a}=\varepsilon',\quad \frac{a-b}{b}=\varepsilon'',$$

sont, étant développées suivant les puissances de ε, ε', ε'',

$$d=c\left[\frac{1}{2+i}+\frac{\varepsilon}{2(2+i)}-\frac{\varepsilon^2}{8(1+i)}+\frac{\varepsilon^3}{16(1+i)}-\ldots\right],$$

$$e=a\left[\frac{1}{2+i}+\frac{\varepsilon'}{2(2+i)}-\ldots\right],\quad f=b\left[\frac{1}{2+i}+\frac{\varepsilon''}{2(2+i)}-\ldots\right],$$

l'on trouve, pour le premier membre de l'équation (124),

$$\frac{1+i}{8(2+i)}abc\left\{\begin{array}{c}-\frac{4+4i}{2+i}(\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon'')-\frac{2i}{2+i}(\varepsilon'\varepsilon''+\varepsilon''\varepsilon+\varepsilon\varepsilon')+\varepsilon^2+\varepsilon'^2+\varepsilon''^2\\ +\text{ termes du troisième ordre en }\varepsilon,\ \varepsilon',\ \varepsilon''\end{array}\right\}.$$

Mais les équations (125) donnent

$$(126)\qquad \left\{\begin{array}{l}(1+\varepsilon)(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')=1,\ \text{d'où}\\ \varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon''=-(\varepsilon'\varepsilon''+\varepsilon''\varepsilon+\varepsilon\varepsilon')-\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'';\end{array}\right.$$

substituant, il vient pour ce même premier membre de l'équation (124), en n'écrivant pas les termes du troisième ordre :

$$\frac{1+i}{8(2+i)}abc \text{ multiplié par } (\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon'')^2 \textit{ qui est du quatrième ordre} \text{ d'après}$$

la valeur de $\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon''$ qu'on vient d'écrire.

Les deux membres de la quatrième équation de condition (113)

donnée par M. Cauchy ne diffèrent donc entre eux que de produits généralement négligeables.

Aussi, en faisant dans l'équation (113)

$$a = 1,4,\ b = 1,2,\ c = 1, \quad \text{avec} \quad i = 1 \quad \text{ou} \quad d = d',\ e = e',\ f = f'$$

et

$$e = 0,391623, \quad f = 0,431408,$$

valeurs fournies alors par les deux dernières équations (112), on tire de cette équation (113)

$$d = 0,364375,$$

qui diffère à peine de 0,364390 déduite de la première (112) pour les mêmes suppositions. Et, si l'on fait

$$a = 1,2, \quad b = 1,1, \quad c = 1, \quad \text{d'où} \quad e = 0,364390, \quad f = 0,382790,$$

on tire de l'équation (113)

$$d = 0,349419$$

sensiblement égal à 0,3494045 déduit de (112).

Les conditions Cauchy (112), (113) expriment donc très-approximativement, et peut-être presque exactement (vu qu'il n'est pas impossible que les termes d'ordre supérieur en δ, δ', δ'' négligés au n° **16**, et dont la grandeur dépend de la fonction inconnue $f(r)$, compensent ceux de même ordre qu'on néglige ici), l'état réel des élasticités, en divers sens, du fluide éthéré dans l'intérieur des corps transparents non isotropes ou isophanes.

24. *Conséquences et conclusion de ce paragraphe.* — On voit que la surface du quatrième degré dont l'importante découverte est due à Fresnel, et dont MM. Hamilton, etc., ont étudié les particularités avec leurs conséquences singulières que l'expérience a confirmées si admirablement, peut, sans contredire aucunement la théorie mathématique due à Cauchy, continuer de servir à déterminer la marche de deux des trois systèmes d'ondes planes, ou celle des deux *rayons* éclairants. Cette théorie de Cauchy, rationnellement fondée sur les équations de

l'élasticité, sera, il est vrai, un peu moins concordante avec celle de Fresnel en ce qui regarde les directions des vibrations éthérées, et, par suite, les *quantités* de lumière réfractées, etc., qu'en ce qui regarde la marche des rayons, car, d'après elle, lorsqu'un faisceau lumineux aura passé de l'air dans un cristal, les vibrations primitivement perpendiculaires à la direction de ce faisceau y seront devenues un peu obliques, sauf pour les directions où les élasticités directes sont des maxima ou des minima (n^{os} **10** et **18**), et ne redeviendront exactement transversales à l'émergence qu'avec diminution d'une certaine proportion, changée en vibrations longitudinales et invisibles. Ce résultat a été même la matière d'une objection contre la théorie mathématique qui le fournit, car des mesurages ont semblé donner l'égalité entre la quantité de lumière reçue sur un cristal et la somme des quantités qu'il transmet en deux rayons, et qu'il réfléchit à ses faces d'incidence et d'émergence. On a objecté aussi le fait de l'invisibilité du *troisième rayon*, dont les vibrations, généralement un peu obliques dans le cristal, doivent, à sa sortie, se changer partiellement en vibrations transversales ou lumineuses. Mais Cauchy a répondu, en 1830 [*], que la proportion engendrée de ces dernières vibrations était trop faible pour faire impression, vu que le degré d'obliquité des vibrations dans le cristal, nul pour les directions de plus grande et de plus petite élasticité, est fort peu considérable pour les directions intermédiaires ; et, d'ailleurs, des recherches plus particulières qu'il a faites depuis (et qui seraient à compléter) sur ce qui se passe tout auprès des surfaces de séparation de deux milieux transparents paraîtraient prouver que certains exposants des formules peuvent passer de l'imaginaire au réel, ce qui change certains mouvements périodiques en mouvements rapidement décroissants ou *évanescents*, comme ceux qui ont lieu à la pénétration dans un corps opaque, etc. Et, à l'autre objection, tirée des expériences de non-déperdition de la quantité totale, on peut très-bien répondre que des vibrations longitudinales ou invisibles, envoyées par le corps lumineux en même temps que les autres, ont dû se changer partiellement en vibrations transversales ou visibles, et compenser les petites pertes

---

[*] *Bulletin des Sciences* (Ferussac), t. XIII, n° 217, p. 425.

de celles-ci [*], au degré d'approximation que comportent les procédés photométriques, toujours imparfaits malgré leurs perfectionnements récents, surtout quand il faut recueillir, pour les y appliquer, des rayons plusieurs fois réfléchis dans l'intérieur du cristal, etc.

Il n'est pas besoin d'insister sur les avantages, on peut dire la nécessité, de la substitution, dans l'enseignement d'une branche de la physique, d'une théorie rationnelle à une théorie en partie inexacte ou fondée sur des hypothèses offrant entre elles des contradictions. Si les faits semblent d'abord y cadrer moins bien, on devra y voir seulement un motif de se livrer à des recherches plus particulières qui ouvriront peut-être un champ nouveau de découvertes, resté inexploré sans cela; et sans doute on y sera aidé par l'étude de la polaire réciproque de l'onde à trois nappes (*caractéristique*, *index-surface*, *wave-slowness*), utile à examiner dès à présent dans ses propriétés et particularités, ainsi que dans les conséquences où sa considération peut conduire [**].

Telles sont les remarques suggérées par l'étude ci-dessus, que nous

---

[*] *Bulletin de la Société Philomathique*, 22 décembre 1855, ou journal *l'Institut* du 23 janvier 1856, n° 1151.

[**] Déjà M. Haughton, en 1846 (*On the Equilibrium and Motion of Bodies, Irish Society*, vol. XXI, Part II, a indiqué l'usage de cette surface réciproque pour construire les trois ondes réfractées, et a montré (p. 182-186) que quand on prend pour plans coordonnés les trois plans de symétrie que le milieu offre toujours, chacune de ses trois intersections par ces plans se compose de trois courbes fermées ayant le même centre et les mêmes deux axes de symétrie, courbes dont l'une est une ellipse et dont les deux autres sont représentées par une même équation du quatrième degré. Celles-ci ne se coupent jamais; mais, sur un des trois plans (et un seul par la raison que a, b, c sont toujours plus grands que d, e, f), l'une d'elles est coupée par l'ellipse en quatre points qui sont des *nœuds* ou *ombilics* analogues à ceux de la surface Fresnel, et qui conduisent à des conséquences si bien vérifiées. La seconde courbe non elliptique est entièrement intérieure aux deux autres courbes fermées, et elle répond, pour l'onde, à la nappe *entièrement extérieure* dont les demi-axes sont $\sqrt{\frac{a+P}{\rho}} = A$, $\sqrt{\frac{b+P}{\rho}} = B$, $\sqrt{\frac{c+P}{\rho}} = C$, et qui donne les vitesses des rayons dont les vibrations sont exactement longitudinales quand ils sont dans les directions de ces axes, et presque longitudinales quand ils sont dans les autres directions.

soumettons aux physiciens et aux géomètres, et dont plusieurs, sans doute, ne leur ont pas échappé [*].

§ V. — *Distribution, en divers sens, des modules ou coefficients d'élasticité définis à la manière de Young et de Navier.*

25. *En quoi les modules diffèrent des élasticités directes.* — Supposons que d'une petite portion d'un corps élastique, ayant son milieu au point d'un corps dont les coordonnées rectangles sont x, y, z, l'on extraie un prisme très-mince dont les arêtes aient la direction arbitraire désignée par x'; le quotient

$$E = \frac{p}{\delta_{x'}}$$

d'une force de traction de même direction, appliquée et uniformément répartie aux divers points de ses deux bases, et dont l'intensité p ou $p_{x'x'}$ est rapportée à l'unité de leurs superficies, divisée par la proportion $\delta_{x'}$ de l'allongement qu'elle fera subir au petit prisme, pourra être pris pour mesure de l'élasticité du corps au point (x, y, z) dans la direction x'.

C'est, comme on sait, le *module* ou *coefficient* d'élasticité introduit

---

[*] Dans des Mémoires présentés les 5 décembre 1859, 16 janvier 1860 et 4 mars 1861 (*Comptes rendus*, t. XLIX, p. 888; t. L, p. 141; t. LII, p. 393), et, aussi, dans un ouvrage publié il y a quelques jours (*Essai sur la théorie de la Lumière*), M. Briot, regardant aussi l'éther comme simplement contracté ou dilaté d'une manière inégale dans les corps biréfringents, conclut comme ci-dessus à ce qu'on ne regarde les vibrations que comme *quasi transversales* et *quasi longitudinales* au passage de la lumière à travers ces corps, bien qu'il s'impose pour condition d'arriver *exactement* à l'onde de Fresnel. Il croit devoir faire, pour atteindre ce dernier but, une hypothèse $f(r) = -\frac{\mu}{r^n}$ sur la forme de la fonction de la distance r des molécules qui représente leurs répulsions mutuelles, et même assigner la valeur 6 à l'exposant n; nous croyons que ce qui précède dispense de cette supposition hardie, qu'il lui sera peut-être difficile de faire accepter.

M. Émile Mathieu, dans un Mémoire tout récent où il considère la surface (40) (*Comptes rendus*, 9 février 1863, t. LVI, p. 255), conclut aussi à conserver l'onde à vibrations invisibles (qu'il regarde, avec Green, comme sphérique, même dans les cristaux).

par Young et par Navier, facile à évaluer expérimentalement, et entrant dans toutes les formules pratiques de l'extension et de la flexion des pièces solides dont la longueur excède beaucoup les dimensions transversales.

Ce coefficient E est différent de celui que nous avons appelé, avec M. Rankine, l'élasticité directe, savoir $a_{x'x'x'x'}$ des §§ III, IV (nos 5, 19), bien qu'il soit aussi quotient d'une pression $p_{x'x'}$ par la dilatation correspondante $\partial_{x'}$, car cette dilatation, lorsqu'on veut évaluer $a_{x'x'x'x'}$, est supposée la seule déformation que subisse la portion de corps où on la considère, tandis que lorsqu'on étend longitudinalement un petit prisme isolé, il s'y opère naturellement des contractions transversales et même quelquefois des glissements intérieurs, nécessaires pour qu'il n'y ait, sur ses faces latérales supposées libres, ni pressions normales, ni pressions tangentielles, et que ses bases n'éprouvent de pressions ou tractions que normalement.

Le module E est aussi le nombre qui, divisé par la densité ρ, donne le carré de la vitesse du son dans le prisme isolé. Si Ω est cette vitesse, on a

$$E = \rho\Omega^2; \tag{127}$$

et c'est comme loi des produits $\rho\Omega^2$ que Cauchy a calculé, dans un beau Mémoire [*], les relations qu'ont entre elles en divers sens les valeurs de E.

26. *Formule et surface donnant la loi de variation du module d'élasticité en divers sens.* — Comme les faces du petit prisme tiré dans la direction x' ne doivent éprouver aucune autre action extérieure, on aura, y' et z' étant deux directions rectangulaires à x', et normalement auxquelles on peut supposer taillées ses quatre faces latérales,

$$p_{x'x'} = p,\quad p_{y'y'} = 0,\quad p_{z'z'} = 0,\quad p_{y'z'} = 0,\quad p_{z'x'} = 0,\quad p_{x'y'} = 0; \tag{128}$$

d'où, d'après la formule générale (25) de changement de plan de pression, en mettant x', y', z' pour x, y, z dans son second membre, ce qui, d'après (128), le réduit à son premier terme, et en remplaçant

[*] *Exercices*, 4e année (1829), p. 30 à 42.

successivement les directions arbitraires n, s par x, y, z,

$$(129)\quad \begin{cases} p_{xx} = p\,c_{xx'}^2, & p_{yy} = p\,c_{yx'}^2, & p_{zz} = p\,c_{zx'}^2, \\ p_{yz} = p\,c_{yx'}c_{zx'}, & p_{zx} = p\,c_{zx'}c_{xx'}, & p_{xy} = p\,c_{xx'}c_{yx'}. \end{cases}$$

Égalant les seconds membres à ceux des expressions générales (1) des mêmes composantes de pression p_{xx}, etc., nous aurons six équations

$$(130)\quad \begin{cases} p\,c_{xx'}^2 = a_{xxxx}\partial_x + a_{xxyy}\partial_y + \ldots + a_{xyxy}\,g_{xy}; \\ p\,c_{yx'}^2 = a_{yyxx}\partial_x + \ldots;\ \text{etc.}\ldots,\quad p\,c_{xx'}c_{yx'} = a_{xyxx}\partial_x + \ldots + a_{xyxy}\,g_{xy}, \end{cases}$$

dont on pourra, en les résolvant, tirer les valeurs des six inconnues

$$\partial_x,\ \partial_y,\ \partial_z,\ g_{yz},\ g_{zx},\ g_{xy}.$$

Substituant celles-ci dans l'expression, semblable à la première (26) de $\partial_{x'}$, en fonction des mêmes déformations parallèles aux x, y, z, savoir

$$(131)\quad \begin{cases} \partial_{x'} \text{ ou } \dfrac{p}{E} = \partial_x\,c_{xx'}^2 + \partial_y\,c_{yx'}^2 + \partial_z\,c_{zx'}^2 + \\ \qquad\qquad + g_{yz}\,c_{yx'}c_{zx'} + g_{zx}\,c_{zx'}c_{xx'} + g_{xy}\,c_{xx'}c_{yx'}, \end{cases}$$

on obtiendra, en divisant par p,

$$(132)\quad \frac{1}{E} = \begin{cases} \text{une expression à 15 termes en } c_{xx'}^4,\ c_{yx'}^4,\ c_{zx'}^4,\ c_{yx'}^2\,c_{zx'}^2, \ldots, c_{yx'}^3\,c_{xx'}, \\ \text{affectés de fonctions des 21 coefficients } a_{xxxx}, \ldots, a_{xyxy}. \end{cases}$$

C'est la formule générale donnant la distribution des modules E autour d'un point.

Si, à partir de ce point, l'on porte sur chaque droite de direction x' une longueur

$$\sqrt[4]{E},$$

l'ensemble des extrémités formera une surface dont on obtient l'équation en coordonnées rectangles si l'on fait, dans l'équation (132)

$$(133)\qquad c_{xx'} = \frac{x}{\sqrt[4]{E}},\quad c_{yx'} = \frac{y}{\sqrt[4]{E}},\quad c_{zx'} = \frac{z}{\sqrt[4]{E}},$$

car E disparaît, et l'on a

(134) $1 =$ (une expression homogène du 4e degré en x, y, z à 15 termes),

où les trois coefficients de x^4, y^4, z^4 sont les inverses des modules d'élasticité dans les sens x, y, z.

Comme les valeurs de ∂_x, ∂_y,... g_{xy} tirées de (130) auraient pour dénominateur commun une expression à 720 termes, nous ne développerons le calcul que pour le cas où les yz, zx, xy sont trois plans de symétrie de contexture. En écrivant, avec les notations (48),

$$(135)\quad \begin{cases} p_{xx} = a\partial_x + f'\partial_y + e'\partial_z, & p_{yz} = d\,g_{yz}, \\ p_{yy} = f'\partial_x + b\partial_y + d'\partial_z \quad \text{et} & p_{zx} = e\,g_{zx}, \\ p_{zz} = e'\partial_x + d'\partial_y + c\partial_z, & p_{xy} = f g_{xy}, \end{cases}$$

puis remplaçant les premiers membres par (129) avec ∂, c_x, c_y, c_z écrits pour abréger au lieu de $\partial_{x'}$, $c_{xx'}$, $c_{yx'}$, $c_{zx'}$, c'est-à-dire par

$$(136)\qquad E\partial c_x^2,\ E\partial c_y^2,\ E\partial c_z^2,\ E\partial c_y c_z,\ E\partial c_z c_x,\ E\partial c_x c_y,$$

et faisant, après résolution, le dénominateur commun

$$(137)\qquad abc - ad'^2 - be'^2 - cf'^2 + 2d'e'f' = D,$$

puis

$$(138)\begin{cases} \dfrac{bc - d'^2}{D} = \dfrac{1}{E_x},\quad \dfrac{ca - e'^2}{D} = \dfrac{1}{E_y},\quad \dfrac{ab - f'^2}{D} = \dfrac{1}{E_z}, \\ \dfrac{1}{2d} - \dfrac{ad' - e'f'}{D} = \dfrac{1}{F_1},\quad \dfrac{1}{2e} - \dfrac{be' - f'd'}{D} = \dfrac{1}{F_2},\quad \dfrac{1}{2f} - \dfrac{cf' - d'e'}{D} = \dfrac{1}{F_3}, \end{cases}$$

on obtient

$$(139)\begin{cases} \partial_x = E\partial\left[\dfrac{c_x^2}{E_x} + \left(\dfrac{1}{F_3} - \dfrac{1}{2f}\right)c_y^2 + \left(\dfrac{1}{F_2} - \dfrac{1}{2e}\right)c_z^2\right],\quad g_{yz} = \dfrac{E\partial}{d}c_y c_z, \\ \partial_y = E\partial\left[\left(\dfrac{1}{F_3} - \dfrac{1}{2f}\right)c_x^2 + \dfrac{c_y^2}{E_y} + \left(\dfrac{1}{F_1} - \dfrac{1}{2d}\right)c_z^2\right],\quad g_{zx} = \dfrac{E\partial}{e}c_z c_x, \\ \partial_z = E\partial\left[\left(\dfrac{1}{F_2} - \dfrac{1}{2e}\right)c_x^2 + \left(\dfrac{1}{F_1} - \dfrac{1}{2d}\right)c_y^2 + \dfrac{c_z^2}{E_z}\right],\quad g_{xy} = \dfrac{E\partial}{f}c_x c_y, \end{cases}$$

d'où l'on déduit, en substituant dans (131), la formule

$$(140)\qquad \frac{1}{E} = \frac{c_x^4}{E_x} + \frac{c_y^4}{E_y} + \frac{c_z^4}{E_z} + 2\frac{c_y^2 c_z^2}{F_1} + 2\frac{c_z^2 c_x^2}{F_2} + 2\frac{c_x^2 c_y^2}{F_3},$$

et l'équation de la surface dont les rayons vecteurs sont les racines quatrièmes des modules E dans leurs sens est

$$(141)\qquad 1 = \frac{x^4}{E_x} + \frac{y^4}{E_y} + \frac{z^4}{E_z} + \frac{2y^2z^2}{F_1} + \frac{2z^2x^2}{F_2} + \frac{2x^2y^2}{F_3}.$$

Les constantes E_x, E_y, E_z peuvent se déterminer, comme on a dit, en taillant trois prismes dans les directions x, y, z.

Cauchy observe qu'on peut, par le même moyen expérimental, déterminer les trois autres constantes que nous appelons F_1, F_2, F_3; car si l'on taille trois prismes dans des directions bissectrices des angles droits

$$(y,\ z),\quad (z,\ x),\quad (x,\ y)$$

et si l'on appelle leurs modules d'élasticité

$$E_1,\quad E_2,\quad E_3,$$

on a, en faisant $c_x = 0$, $c_y = c_z = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dans (140), la première des expressions suivantes dont les deux autres s'obtiennent de même :

$$(142)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{E_1} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{E_y} + \frac{1}{E_z}\right) + \frac{1}{2F_1},\\ \frac{1}{E_2} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{E_z} + \frac{1}{E_x}\right) + \frac{1}{2F_2},\\ \frac{1}{E_3} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y}\right) + \frac{1}{2F_3}. \end{aligned}\right.$$

d'où l'on peut tirer F_1, F_2, F_3.

Il observe aussi qu'en appelant ε le module d'élasticité dans les quatre directions faisant, avec les trois axes, des angles égaux, ou pour lesquelles

$$c_x^2 = c_y^2 = c_z^2 = \frac{1}{3},$$

on a

$$(143)\quad \frac{1}{\mathcal{E}}=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{E_x}+\frac{1}{E_y}+\frac{1}{E_z}+\frac{2}{F_1}+\frac{2}{F_2}+\frac{2}{F_3}\right)=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}+\frac{1}{E_3}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{E_x}+\frac{1}{E_y}+\frac{1}{E_z}\right).$$

27. *Limites des valeurs relatives de quelques-uns des coefficients* a_{xxxx}, etc. — Les formules précédentes peuvent nous fournir à cet égard quelques documents.

Supposons en effet la contexture la même, non pas en tous sens, mais dans les trois directions rectangulaires x, y, z, d'où

$$(144)\quad \begin{cases} a=b=c, & d=e=f, & d'=e'=f', \\ E_x=E_y=E_z, & F_1=F_2=F_3, & E_1=E_2=E_3\,; \end{cases}$$

on trouve alors

$$(145)\quad E_x=\frac{(a-d')(a+2d')}{a+d'},\quad E_1=4d.\frac{(a-d')(a+2d')}{(a-d')(a+2d')+2ad}.$$

Les corps solides dont on se sert n'offrent, dans aucune de leurs parties, une contexture instable comme celle que peut avoir l'intérieur des larmes bataviques, etc. Les modules d'élasticité tels que E_x, E_1 des petits prismes qu'on y taille doivent donc être positifs. Cela exige qu'on ait

$$a>d',\quad \text{ou}\quad a_{xxxx}>a_{xxyy}\quad \text{ou}\quad a_{xxzz},$$

ou que l'élasticité directe soit plus grande que l'élasticité latérale, ce qui est d'ailleurs évident pour peu qu'on les attribue au jeu des actions entre molécules.

On conçoit aussi que dans le corps dont les modules d'élasticité sont égaux en trois sens orthogonaux, les modules des sens intermédiaires ne s'élèveront guère à une fois et demie ceux-ci, ou ne descendront guère aux deux tiers. Or, en faisant $d'=d$ conformément à la théorie moléculaire, on trouve

$$(146)\quad \frac{E_1}{E_x}=\frac{4d(a+d)}{a^2+3ad-2d^2},\quad \frac{\mathcal{E}}{E_x}=\frac{3d(a+d)}{(a-d)(a+3d)}.$$

Pour que ces deux rapports restent entre $\frac{3}{2}$ et $\frac{2}{3}$ il faut respectivement que

$$\frac{a}{d} \text{ reste entre } 2 \text{ et } 4{,}702, \quad \text{et entre } 2{,}236 \text{ et } 4{,}260.$$

D'où l'on peut inférer jusqu'à un certain point que lorsque a, b, c ne sont pas égaux, d, e, f ne varient guère qu'entre

$$\frac{1}{2{,}2} \text{ et } \frac{1}{4{,}3} \text{ de } \sqrt{bc}, \text{ de } \sqrt{ca} \text{ et de } \sqrt{ab} \text{ respectivement.}$$

On trouverait, aussi, en raisonnant comme au n° **12**, que si l'on s'impose que les E varient graduellement, c'est-à-dire augmentent ou diminuent constamment, de l'une à l'autre de leurs trois valeurs principales E_x, E_y, E_z, sans offrir d'autres maxima et minima ni dans les plans yz, zx, xy, ni dans l'intérieur de leurs quatre angles trièdres, et offrent une marche de variation simple, il faut :

(147)
1° Que F_1 ne sorte pas de l'intervalle de E_y à E_z; F_2 de E_z à E_x; F_3 de E_x à E_y;

2° Que si $E_x > E_y > E_z$ on ait en même temps $F_1 < F_2 < F_3$;

3° Que, malgré ces deux premières relations, les quantités

$$\left(\frac{1}{E_y} - \frac{1}{F_3}\right)\left(\frac{1}{E_z} - \frac{1}{F_2}\right) + \left(\frac{1}{F_3} - \frac{1}{F_1}\right)\left(\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{E_z} - \frac{1}{F_1}\right)\left(\frac{1}{E_x} - \frac{1}{F_3}\right) + \left(\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2}\right)\left(\frac{1}{F_2} - \frac{1}{F_3}\right),$$

$$\left(\frac{1}{E_x} - \frac{1}{F_2}\right)\left(\frac{1}{E_y} - \frac{1}{F_1}\right) + \left(\frac{1}{F_2} - \frac{1}{F_3}\right)\left(\frac{1}{F_3} - \frac{1}{F_1}\right),$$

n'aient pas trois valeurs de même signe.

Les limites de valeurs relatives qui en résulteront pour les rapports mutuels entre les coefficients a, b, c, d ou d', e ou e', f ou f', différeront peu de celles qui résultent des conditions analogues posées au n° **12**.

Il est possible que ces conditions d'inégalité ou de $>$ et $<$ entre les coefficients soient applicables, jusqu'à un certain point, *aux bois*.

Mais, pour les métaux, nous pensons que les élasticités doivent suivre

le mode de distribution remplissant toutes les conditions 1°, 2°, 3° d'une manière plus déterminée, dont nous allons nous occuper au numéro suivant et qui revient à celui du n° **13**.

28. *Distribution ellipsoïdale des modules d'élasticité* E. — Considérons le cas, compris dans (147), où l'on a

$$(148)\qquad F_1 = \sqrt{E_y E_z},\quad F_2 = \sqrt{E_z E_x},\quad F_3 = \sqrt{E_x E_y};$$

on trouve, en substituant dans l'équation (140) $\frac{1}{E} = \ldots$, et extrayant les racines carrées, la formule suivante pour obtenir le module E dans une direction quelconque, déterminée par les cosinus c_x, c_y, c_z :

$$(149)\qquad \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{c_x^2}{\sqrt{E_x}} + \frac{c_y^2}{\sqrt{E_y}} + \frac{c_z^2}{\sqrt{E_z}},$$

et pour l'équation de la surface, alors ellipsoïdale, dont les rayons vecteurs sont les $\sqrt[4]{E}$:

$$(150)\qquad 1 = \frac{x^2}{\sqrt{E_x}} + \frac{y^2}{\sqrt{E_y}} + \frac{z^2}{\sqrt{E_z}}.$$

La condition $F_1 = \sqrt{E_y E_z}$, la première des trois (148), revient, d'après les expressions (138), à

$$\left(\frac{1}{2d} - \frac{ad' - e'f'}{D}\right)^2 = \frac{ca - e'^2}{D}\cdot\frac{ab - f'^2}{D},$$

ou à

$$D^2 - 4Dd(ad' - e'f') = 4d^2[(ca - e'^2)(ab - f'^2) - (ad' - e'f')^2] = 4ad^2D.$$

On peut diviser par D et l'on obtient, en faisant de même pour les deux autres conditions (148),

$$(151)\qquad \left\{\begin{aligned} D \quad \text{ou} \quad abc - ad'^2 - be'^2 - cf'^2 + 2d'e'f' &= 4d[a(d+d') - e'f'] = \\ &= 4e[b(e+e') - f'd'] = \\ &= 4f[c(f+f') - d'e'], \end{aligned}\right.$$

équations qui sont satisfaites par

$$a = \frac{(2e+e')(2f+f')}{2d+d'}, \quad b = \frac{(2f+f')(2d+d')}{2e+e'}, \quad c = \frac{(2d+d')(2e+e')}{2f+f'},$$

ou, ce qui revient au même, par

$$(152) \quad \begin{cases} 2d+d' = \sqrt{bc}, \quad 2e+e' = \sqrt{ca}, \quad 2f+f' = \sqrt{ab}, \\ \text{si l'on a en même temps} \\ \dfrac{d'}{d} = \dfrac{e'}{e} = \dfrac{f'}{f} = \text{constante } i; \end{cases}$$

c'est-à-dire précisément par les conditions (57) de réduction à un ellipsoïde de la surface dont les rayons sont les inverses des $\sqrt[4]{a_{x'x'x'x}}$, pourvu qu'on y joigne les conditions (63), sous lesquelles les neuf coefficients a, b,..., d,..., f′ peuvent être mis sous la forme (64) $(2+i)a^2,\ldots,$ $bc,\ldots,\ \ldots\ i\,ab$, et les équations d'équilibre sous la forme (66) [*].

Ainsi, dans ce cas, qui est celui de l'intégrabilité des équations différentielles sous forme finie par des potentiels analytiques de deux espèces, aussi facilement que quand il y a isotropie, la distribution des modules d'élasticité E est ellipsoïdale comme celle des élasticités directes $a_{x'x'x'x'}$.

Au reste, pour la surface dont les rayons sont les $\sqrt[4]{E}$, comme pour

---

[*] En faisant $d' = id$, $e' = ie$, $f' = if$ dans les équations (151) et éliminant b, c au moyen de celles que donnent les trois derniers membres, on obtient l'équation en a

$$\left(\frac{ad}{ef}\right)^3 - (3i^2+4i+4)\frac{ad}{ef} + 2i^2(i+2) = 0,$$

résolue non-seulement par $\frac{ad}{ef} = 2+i$, qui, répété avec les autres lettres, entraîne les premières (152), mais encore par $\frac{ad}{ef} = \frac{-2-i+\sqrt{9i^2+4i+4}}{2}$. Mais cette dernière valeur ne convient pas à la question, car quand $d=e=f$, et quand on fait $i=1$ comme l'indique la théorie moléculaire, il en résulte

$$a = \frac{\sqrt{17}-3}{2}\,d = 0{,}562d,$$

ce qui est impossible, car on a vu qu'on ne pouvait pas prendre $a < d$.

la surface presque inverse dont les rayons sont les $\frac{1}{\sqrt{a_{x'x'x'x'}}}$, la coupe par un ou deux des trois plans yz, zx, xy peut être elliptique sans l'être dans l'autre ou les deux autres.

29. *Surface dont les rayons vecteurs sont les modules* E *eux-mêmes.* — Cette surface est du huitième degré, car son équation se déduit de l'équation (132) ou (140) en y faisant

$$E = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{et} \quad c_{xx'},\ c_{yx'},\ c_{zx'} = \frac{x,\ y,\ z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}:$$

ce qui donne, si c'est de (140),

$$(153) \qquad (x^2 + y^2 + z^2)^3 = \left(\frac{x^4}{E_x} + \frac{y^4}{E_y} + \ldots + \frac{x^2 y^2}{F_3}\right)^2.$$

Pour en tracer autant qu'on veut de coupes par points, ce qu'il y a de plus facile est de calculer directement les rayons vecteurs E au moyen de

$$(140) \qquad \frac{1}{E} = \frac{c^4_{xx'}}{E_x} + \frac{c^4_{yx'}}{E_y} + \ldots$$

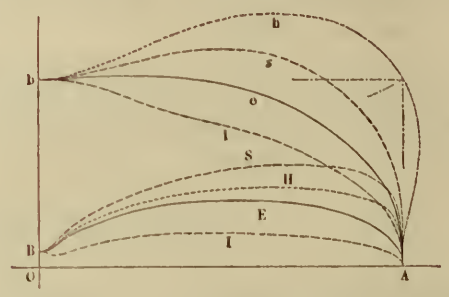
en se donnant les angles (x, x'), (y, x'), (z, x') de ces rayons avec les x, y, z.

Dans le cas de distribution du n° **28** où l'on a un ellipsoïde quand ce sont les $\sqrt[4]{E}$ qu'on prend pour rayons, c'est-à-dire où l'on a (149)

$$(154) \qquad \frac{1}{E} = \left(\frac{c^2_{xx'}}{\sqrt{E_x}} + \frac{c^2_{yx'}}{\sqrt{E_y}} + \frac{c^2_{zx'}}{\sqrt{E_z}}\right)^2,$$

cette surface du huitième degré (153), dont les rayons sont les E, diffère peu d'un ellipsoïde de mêmes diamètres dans les sens x, y, z lorsque les trois élasticités principales E_x, E_y, E_z n'ont pas entre elles des rapports de plus de 3 à 2. Mais elle en diffère très-sensiblement quand ces rapports mutuels sont plus considérables, comme on peut voir à la figure ci-après, où la ligne courbe pleine AEB représente un quart de coupe de la surface par un plan coordonné, quand on a un rapport de 20 à 1 pour celui des demi-axes $OA = E_x$ et $OB = E_y$, tandis qu'on a Aeb lorsque ce rapport n'est que de 2 à 1.

Et les différences avec l'ellipse sont *dans le sens des expériences connues*, car M. Hagen [*], après avoir mesuré les modules d'élasticité de



cinq espèces de bois dans le sens longitudinal et dans le sens transversal supposés être x et y, et avoir trouvé

$E_x : E_y =$	48,	83,	15,	22,	23
pour les bois de	pin,	sapin,	chêne,	hêtre rouge,	hêtre blanc,

soit moyennement $= 20$, a fait aussi quelques mesurages de modules dans des sens obliques x', et a proposé, pour représenter à peu près ses expériences *dont il ne donne pas le détail*, l'expression

$$\frac{1}{E} = \frac{c^3_{xx'}}{E_x} + \frac{c^3_{yx'}}{E_y}, \tag{155}$$

qui fournirait la courbe AHB en petit ponctué; or la courbe pleine AEB donnée par la distribution elliptique des $\sqrt[4]{E}$, ou par

$$\frac{1}{E} = \left(\frac{c^2_{xx'}}{\sqrt{E_x}} + \frac{c^2_{yx'}}{\sqrt{E_y}}\right)^2$$

n'en diffère pas dans les limites d'exactitude des expériences de ce genre.

La formule empirique de M. Hagen ne saurait être adoptée, car elle donne, quand $\frac{E_x}{E_y} = 2$, la courbe Ahb, qui est tout à fait inacceptable; et, en général, comme cette courbe (155) est circonscrite au rectangle

[*] *Ueber die Elasticität des Holzes* (*Annales de Poggendorf*, t. LVIII, p. 125), et *Annales des Ponts et Chaussées*, 1845, 2e semestre, p. 276.

dont les demi-côtés sont E_x et E_y, elle donne pour E un maximum qui est en grandeur et en direction la demi-diagonale $\sqrt{E_x^2 + E_y^2}$, ce qui ferait $E_x\sqrt{2}$ quand les élasticités sont égales dans les directions x et y, tandis que dans ce cas $E_x = E_y$, E devrait être $= E_x$, ou égal en tous sens.

Sur la même figure, les courbes en ponctué long AIB, ASB représentent ce que serait la coupe xy de la surface du huitième degré (153) pour $\frac{E_x}{E_y} = 20$, si, au lieu de l'expression (148) $F_3 = \sqrt{E_x E_y}$ on prenait successivement, pour la constante F_3, sa limite inférieure E_y et sa limite supérieure E_x déterminées par les premières conditions (147). La deuxième courbe, ASB, exagère encore l'inconvénient signalé dans la courbe empirique (155) AHB; et la première, AIB, s'en écarte trop et offrirait une loi bizarre et tout à fait improbable. Ces inconvénients subsistent dans la courbe Aib, analogue à AIB mais relative à $\frac{E_x}{E_y} = 2$; et la courbe Asb, analogue à ASB pour ce même cas qui n'a pas été celui des expériences, offre toujours une loi moins simple et moins probable que Aeb.

Ainsi, quoique la loi de distribution ellipsoïdale des $\sqrt[4]{E}$, répondant à (148) $F_4 = \sqrt{E_y E_z}$, etc., et aussi à (152) ou (57) $2d + d' = \sqrt{bc}$, etc., et représentée par les équations (149) ou (154), ne soit pas prouvée pour les corps amorphes dans lesquels, comme pour les bois, les élasticités sont très-différentes dans différents sens, cependant il conviendra d'en essayer toujours l'emploi dans la pratique; et, lorsqu'on ne pourra pas l'adopter exactement, il ne faudra pas s'en écarter beaucoup.

§ VI. — *Résumé et conclusions pratiques.*

30. Nous avons (§ II, nos 2 à 4), dans un préambule qui devait servir aux considérations et à la discussion du § IV, rappelé l'établissement des formules d'élasticité, y compris celle du *potentiel* des forces intérieures, employé dès le principe par Navier (et dont les géomètres de l'Angleterre et de l'Allemagne font un grand usage), et nous avons compris dans toutes ces formules et établi de diverses manières les termes qui dépendent d'un élément ordinairement omis, savoir, les

pressions primitives ($p^0_{xx}, \ldots, p^0_{xy}$) pouvant exister dans le corps ou dans le milieu élastique avant les déplacements, déformations ou mouvements vibratoires, qui sont l'objet des calculs.

Nous avons montré qu'entre les trente-six coefficients a_{xxxx}, etc. qu'elles contiennent outre les six composantes primitives p^0, il y a au moins *quinze* égalités deux à deux (5) qui les réduisent à *vingt et un* au plus, sans compter les *six* égalités *complémentaires* (8) encore contestées quoiqu'elles soient fournies, avec ou sans calcul, par la loi des actions moléculaires, qu'il est inévitable d'invoquer de toute manière, ouvertement ou tacitement, pour établir toute formule d'équilibre d'élasticité.

Nous avons ensuite (§ III, nos **5** à **16**) démontré la formule symbolique très-simple (33) qui donne les vingt et un coefficients d'élasticité $a_{x'x'x'x'}, \ldots a_{y'z'y'z'}, \ldots a_{y'y'y'x'}$ pour de nouveaux axes coordonnés en fonction des vingt et un $a_{xxxx} \ldots a_{yyyx}$ pour des axes anciens, et qui fournit même, plus généralement, les coefficients qui entreraient dans l'expression d'une composante oblique de pression sur une face quelconque. Les mêmes notations symboliques expriment très-brièvement la plupart des formules de l'élasticité.

La loi des élasticités directes $a_{x'x'x'x'}$ en divers sens est donnée (n° **5**) par les inverses des quatrièmes puissances des rayons vecteurs ou des diamètres d'une surface du quatrième degré, dont les termes ont une grande analogie avec ceux qui composent l'expression du potentiel (n° **2**), et qui offre, dans le cas de trois plans de symétrie, treize diamètres normaux ou treize directions de maximum et de minimum, se réduisant à trois lorsque les coefficients ont entre eux certaines relations d'inégalité, probablement toujours vérifiées.

Dans un cas encore plus particulier, exprimé par trois relations d'égalité telles que $2d + d' = \sqrt{bc}$, l'équation du quatrième degré se réduit au second; la distribution des élasticités directes, ou plutôt de leurs racines quatrièmes inversées, est ellipsoïdale. Lorsqu'elle a lieu, les équations de l'équilibre d'élasticité sont intégrables sous forme finie par des expressions analogues au *potentiel analytique* de Green, aussi facilement que quand il y a isotropie; et réciproquement une pareille intégrabilité exige la distribution en question. Mais ce mode de distri-

bution doit être remarqué à un autre titre, car c'est, comme le prouve un calcul facile des forces moléculaires en jeu, celui qui doit s'observer, au moins à très-peu près entre certaines limites d'inégalité des élasticités en divers sens, dans les corps solides amorphes ou à cristallisation confuse, ou dans les milieux élastiques dont l'isotropie a été altérée par des compressions ou dilatations inégales rapprochant plus les molécules dans certaines directions que dans d'autres.

Au § IV (nos **17** à **24**) nous avons appliqué la formule (33) de transformation des coefficients à l'examen de certaines conditions ou relations, au nombre de quatorze, auxquelles l'illustre physicien Green assujettit les vingt et un coefficients d'élasticité du fluide éthéré dans l'intérieur des corps transparents biréfringents pour que les vibrations moléculaires y soient, comme dans l'air ou le verre, exactement parallèles aux plans des ondes lumineuses de toute direction, afin de se conformer à l'hypothèse que Fresnel a prise pour base de sa théorie évidemment défectueuse quoique unie à d'aussi brillantes découvertes, et bien que Green reconnaisse que cet exact parallélisme ne doit pas s'observer dans tous les corps transparents. Nous avons montré d'abord que ces quatorze conditions sont absolument les mêmes lorsqu'il y avait, antérieurement à tout ébranlement, des pressions primitives p^0 de grandeur et de direction quelconque dans l'éther, en sorte qu'on ne peut pas chercher, dans l'existence possible de ces pressions ordinairement omises, la solution des difficultés auxquelles conduit l'hypothèse que Green et Fresnel se sont imposée. Nous avons reconnu ensuite que d'après les conditions en question l'élasticité directe de l'éther dans le cristal serait *égale en tous sens;* qu'une même dilatation y produirait, dans toutes les directions, une pression, non-seulement de même intensité, mais, aussi, constamment normale à la face où elle s'exercerait comme dans les corps isotropes; qu'il y aurait, entre les élasticités directe, latérale et tangentielle, les mêmes relations que dans ces corps, etc.; enfin que chacune des conditions, si elle s'observe dans toutes les directions, entraîne toutes les autres.

Il est impossible de ne pas en conclure que les quatorze conditions de transversalité des vibrations sont simplement celles de l'isotropie du milieu. Le calcul le montre d'une manière évidente, si l'on admet comme Fresnel, Cauchy, etc., que les particules de l'éther agissent

entre elles suivant leurs lignes de jonction et proportionnellement à une fonction de leurs distances ; mais si l'on rejette l'usage de cette grande loi physique, non-seulement pour l'établissement des équations de l'élasticité, mais encore pour le calcul des inégalités d'élasticité dans un corps ou un milieu où les molécules ont des degrés divers de rapprochement, il est toujours évident que toute autre loi qu'on lui substituerait donnerait nécessairement des inégalités entre les élasticités directes tout aussi bien qu'entre les élasticités latérales ou tangentielles dans les directions où les intervalles moléculaires sont différents, comme cela doit avoir lieu dans le verre comprimé ou trempé, et même dans les cristaux dont la forme est polyédrique *non régulière*, comme celle de cristaux biréfringents.

De là l'impossibilité de la double réfraction dans un corps transparent, si les vibrations lumineuses sont *exactement* transversales, pour *toutes* les inclinaisons qu'on peut supposer aux plans des ondes, et non pas seulement pour certaines directions principales telles que celles des maxima et minima des élasticités directes.

Mais cette transversalité, ou ces quatorze conditions de Green, ne sont nullement nécessaires pour que l'onde courbe enveloppée par toutes les ondes planes qui se sont croisées au même instant en un même point soit exactement la surface du quatrième degré de Fresnel, dont l'étude a révélé des particularités curieuses, si bien confirmées par l'expérience. Il suffit, pour cela, de conditions ou relations moins nombreuses et plus générales, et qui, malgré un peu moins de simplicité dans leur expression, n'ont rien de bizarre ni d'arbitraire, et au contraire s'observent très-probablement dans la réalité, car on reconnaît facilement qu'elles coïncident, exactement peut-être, mais en tous cas très-approximativement, avec les conditions (de distribution ellipsoïdale) qui sont remplies pour un corps élastique dont l'isotropie primitive a été altérée par des compressions inégales ; or c'est précisément l'état où tous les physiciens admettent que se trouve l'éther, non-seulement dans le verre comprimé, mais aussi dans l'intérieur des cristaux des formes polyédriques non régulières les plus diverses.

Ces conditions (112), (113) sont celles qui ont été trouvées par Cauchy, dont on peut présenter l'analyse d'une manière simple et en même temps plus générale, car on peut y conserver les vingt et un

coefficients que plusieurs géomètres croient indépendants ; et comme ce nombre de coefficients n'est pas nécessaire pour obtenir la surface de Fresnel, qui se construit aussi bien quand on n'en conserve que quinze, on ne trouve aucun motif de rejeter les six égalités dites complémentaires (8) des coefficients deux à deux, dans la considération des phénomènes de la double réfraction.

Une légère obliquité des vibrations lumineuses aux rayons et même aux ondes à leur passage à travers les corps biréfringents n'est contredite par aucune expérience, et elle n'a rien d'incompatible avec l'onde de Fresnel, ni même avec les expériences photométriques faites sur les quantités de lumière reçues et transmises. Si, d'ailleurs, on reconnaît par la suite que cette onde du quatrième degré à deux nappes, jointe à une onde ellipsoïdale pour les rayons non lumineux, ne fournit qu'une simple approximation dont on ne puisse plus se contenter, et qu'elle n'explique pas certains faits nouvellement acquis, on pourra toujours, faute de savoir poser l'équation de l'onde Cauchy à trois nappes, étudier toutes les particularités de la marche des ondes sur sa *polaire réciproque* (par rapport à une sphère ayant le même centre), dont l'équation du sixième degré est simple et toute posée, et dont M. Haughton a déjà reconnu les nœuds et étudié en partie les propriétés, fort analogues à celles de la polaire de l'onde Fresnel ; et cette étude rationnelle conduira peut-être à d'autres découvertes plus délicates qui auraient échappé en persistant à baser l'optique théorique sur des expédients impliquant contradiction à plusieurs égards.

Enfin nous avons reconnu (§ V), en prenant pour base un travail de Cauchy, que les *modules d'élasticité* E, définis à la manière de Young et de Navier, et qui entrent dans les formules d'extension et de flexion des solides, se distribuaient dans les diverses directions suivant une surface du quatrième degré, inverse à quelques égards de celle qui nous a manifesté la loi de distribution des élasticités directes $a_{x'x'x'x'}$ en tous sens. On tire de leur considération certaines limites des rapports entre les élasticités directes et les élasticités latérales ou tangentielles dans les solides en général.

La distribution des racines quatrièmes des modules E est *ellipsoïdale* dans les mêmes cas que celle des inverses des racines quatrièmes des élasticités directes $a_{x'x'x'x'}$.

Ces considérations ne sont pas de pure spéculation. On a reconnu que divers faits de l'élasticité des métaux, du verre, etc., ne pouvaient être suffisamment bien représentés par les formules d'isotropie à un seul coefficient, fournies par les premiers travaux des géomètres sur la théorie de l'élasticité. Bien que le désaccord ait été exagéré, et disparaisse bien des fois devant une discussion des expériences, il est très-vrai que l'interprétation exige d'autres fois qu'on puisse disposer de plusieurs constantes. Quelques savants ont cru satisfaire convenablement à cette condition en employant des formules qui *supposent encore l'isotropie*, mais où l'on admet deux coefficients indépendants, malgré le résultat contraire fourni logiquement par la loi des actions entre molécules qui est, disons-nous, toujours tacitement invoquée, même quand on en veut repousser les conséquences. Mais, ainsi que nous l'exprimons à la fin du n° **2**, et espérons le démontrer complétement ailleurs, c'est là un expédient conduisant à se faire illusion sur la vraie cause des faits à interpréter. Il faut plutôt recourir aux formules d'hétérotropie, en reconnaissant une différence d'élasticité suivant trois ou au moins deux sens rectangulaires. Or la loi de variation des élasticités dans les sens obliques n'est pas arbitraire, et, pour les corps amorphes généralement employés dans les constructions, le nombre des coefficients indépendants a besoin d'être réduit. Notre loi ellipsoïdale, qui lie les élasticités tangentielles d, e, f aux élasticités directes a, b, c, et qui donne ainsi trois constantes seulement dans les cas ordinaires de contexture symétrique par rapport à trois plans, est la plus convenable à adopter, non pas seulement comme la plus simple et prêtant le mieux aux calculs analytiques (n° **15**), mais comme offrant un haut degré de probabilité, qui devient de la certitude (au moins à une approximation qui suffit) si l'hétérotropie des corps métalliques, vitreux, etc., dont on s'occupe, résulte de ce que l'écrouissage, l'étirage, etc., ou les circonstances de la solidification, n'ont fait que rapprocher plus leurs molécules dans certains sens que dans d'autres; et, d'après quelques expériences faites en Allemagne, elle offre encore ce qu'il y a de mieux à adopter même pour les bois, dans lesquels les différences d'élasticité en divers sens sont très-considérables.

THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Soit m un nombre entier impair. Décomposons $4m$, de toutes les manières possibles, en une somme de quatre carrés impairs, et soit en conséquence

$$4m = i^2 + i'^2 + i''^2 + i'''^2,$$

i, i', i'', i''' désignant des entiers impairs, positifs; puis formons la somme

$$\sum (-1)^{\frac{ii'-1}{2}} ii'$$

relativement à toutes ces décompositions. Il faut, comme on voit, prendre dans toutes les décompositions le produit ii' affecté du signe $+$ ou du signe $-$ suivant que ii' est de la forme $4\mu + 1$ ou de la forme $4\mu + 3$, après quoi l'on fera la somme algébrique de tous ces produits. Deux décompositions sont différentes dès que i, i', i'', i''' n'y ont pas identiquement les mêmes valeurs. C'est sous cette condition que Jacobi a trouvé le nombre des décompositions égal à la somme des diviseurs de m.

Considérons d'un autre côté les décompositions de $2m$ qui répondent à l'équation

$$2m = r^2 + r'^2 + 4s^2 + 4s'^2,$$

où r, r' sont des entiers impairs et positifs, tandis que s, s' sont indifféremment pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs. Il y aura une seconde somme

$$\sum (-1)^{\frac{rr'-1}{2}} rr',$$

relative à ce nouveau mode de partition.

Cela posé, je dis qu'il existe une relation très-simple entre les deux sommes

$$\sum (-1)^{\frac{ii'-1}{2}} ii'$$

et

$$\sum (-1)^{\frac{rr'-1}{2}} rr'.$$

En effet ces deux sommes ont toujours la même valeur absolue. Elles sont égales et de même signe quand $m = 4k + 1$, mais égales et de signe contraire quand $m = 4k + 3$. Ainsi on a toujours

$$\sum (-1)^{\frac{ii'-1}{2}} ii' = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sum (-1)^{\frac{rr'-1}{2}} rr'.$$

Je ne crois pas avoir besoin d'ajouter des exemples.

FIN DU TOME HUITIÈME (2e SÉRIE).

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

10

QA
1
J684
sér.2
t.8
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY